

VŠB - Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní

Institut dopravy

Modely synchronizace systémů linek v MHD

Disertační práce

Studijní program:	P2301 Strojní inženýrství
Studijní obor:	2301V003 Dopravní technika a technologie
Školitel:	doc. RNDr. Štefan Peško, CSc.
Doktorand:	Ing. Richard Turek

Ostrava 2012

ANOTACE

TUREK, R. *Modely synchronizace systémů linek v MHD*. Ostrava: Institut dopravy, Fakulta strojní, VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2012, 102 s. Disertační práce, školitel: Peško, Š.

Disertační práce se zabývá modelováním synchronizace odjezdů spojů z přestupních zastávek pomocí Petriho sítí a matematického aparátu spektrální analýzy max-plus algebry. Úvod práce je věnován významu problematiky synchronizace spojů MHD včetně popisu současných přístupů v České republice a zahraničí. Následuje simulace a vizualizace pohybu vozidel v síti linek MHD s využitím Petriho sítí a modelování synchronizace vybraných linek systémem rovnic max-plus algebry při redukci linek MHD Prostějov. Při ověřování navržených modelů byly využity vybrané funkce otevřených softwarových nástrojů Snoopy, Pipe2, Scilab a Scicoslab. V závěru je provedeno celkové zhodnocení výsledků experimentů včetně vyplývajících doporučení pro provozovatele MHD a shrnuty vědecké přínosy práce.

ANNOTATION

TUREK, R. *Models of synchronization systems lines in public transport*. Ostrava: Institute of Transport, Faculty of Mechanical Engineering, VŠB - Technical University of Ostrava, 2012, 102 p. Dissertation thesis, adviser: Peško, Š.

Dissertation deals with the modeling synchronisation departures times from connecting stops using Petri nets and the mathematical apparatus of the spectral analysis of the max-plus algebra. In the introduction is given the importance of the problem of synchronization connections to public transport including a description of the current approaches in the Czech Republic and abroad. Followed by the simulation and visualization of the movement of vehicles on the network of lines created with the use of Petri nets and modeling synchronisation of selected lines system equations max-plus algebra in the reduction lines of public transport in Prostějov. In connection with your experiments is carried out with an introduction to the software used Snoopy, Pipe2, Scilab and Scicoslab. In conclusion, the overall assessment is made of the results of experiments, including the resulting recommendations for public transport operators and summarise the scientific benefits of the work.

Prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou disertační práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením školitele a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě.....

.....

podpis studenta

OBSAH

(v důsledku chybného posunutí stran při generování obsahu je uveden na konci)

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

MHD městská hromadná doprava

JŘ jízdní řád

DES Discrete Event Systems

Z množina zastávek,

n počet relací,

a_i výchozí zastávka v i -té relaci,

b_i cílová zastávka v i -té relaci,

(a_i, b_i) i -tá relace,

t_i jízdní doba v i -té relaci,

R množina relací, $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)\}$,

l_q interval na q -té lince.

o_q oběžná doba na lince q .

n_q počet vozidel na lince q .

$x_i(k)$ k -tý synchronizovaný odjezd v i -té relaci,

λ délka maximálního průměrného cyklu mezi odjezdy z jedné resp. více zastávek.

Z^+ množina celých kladných čísel

OP Oděvní podnik

1 ÚVOD

Řešení hromadné osobní dopravy představuje komplex dílčích problémů, které musí být řešeny společně. Jedná se především o provozní a ekonomická kritéria. Klíčovým problémem každého systému MHD je snaha o maximální snížení ekonomické ztrátovosti. S uvedeným problémem velice úzce souvisí ekonomická efektivita rozsahu dopravní sítě MHD především ve vztahu k počtu nasazených vozidel a provozní délce jednotlivých linek, který by korespondoval s požadavky cestující veřejnosti. Jedním z nežádoucích důsledků takovýchto do značné míry protichůdných požadavků může být ztráta možnosti vhodných přestupů mezi spoji některých linek na významných zastávkách sítě či značná nerovnoměrnost odjezdů vozidel nejen v přepravních špičkách ale i sedlech. Na řešení tohoto problému bude zaměřena tato disertační práce, ale bylo by možné řešit také nerovnoměrností odjezdů vozidel na společných úsecích linek.

Existence přímého spojení znamená výhodu pro cestujícího spočívající v tom, že nemusí při svých cestách přestupovat. V důsledku racionalizace však často dochází ke snížení počtu linek, což pro cestující veřejnost představuje zvýšení potřeby přestupovat v některých relacích. Relace bez možnosti přímého spojení jsou charakteristické nižšími intenzitami přepravního proudu v daných relacích a vyšší mírou souběhu linek v případě existence linek zajišťující přímé spojení v těchto relacích, kdy trasy takových linek částečně kopírují trasu jiných linek, ovšem k souběhu linek dochází také vzhledem k charakteru systému tras.

V praxi jsou známy případy zrušení části autobusových linek, které jsou v přímém souběhu s novým úsekem jiné linky nebo redukce počtu stávajících linek za účelem zefektivnění. Neznamená to však, že dojde ke zhoršení dopravní obslužnosti. V mnoha úsecích je tomu právě naopak. Zachovány jsou totiž zpravidla páteřní linky s krátkým intervalem a na části z nich se intervaly podstatně zkracují. Méně linek znamená sjednocení nástupních bodů a také snazší koordinaci jízdních řádů. Některá přímá spojení, zajišťovaná v současnosti linkami s dlouhými intervaly, mohou být rychlejší s přestupem, neboť interval a přestupní doba budou v součtu kratší, než čekání na přímou linku s dlouhým intervalem.

V takovém případě je třeba provést kritickou analýzu zaměřenou na identifikaci přestupních povinností a jejich dopadů na cestující veřejnost s ohledem na zachování nejvíce vytižených linek a navýšení počtu spojů na těchto linkách, zajištění únosného počtu přestupů mezi relacemi bez přímého spojení, koordinaci JŘ na vybraných přestupních zastávkách a částečné odstranění souběhu linek. Pozornost je pak soustředěna na v úvahu přicházející alternativy spojení a možnosti řešení přestupních vazeb.

Při tvorbě linek sítě MHD se i v současné dopravní praxi preferuje tvorba linek na základě zkušeností dispečerů převážně z historických údajů a prostorového uspořádání města. Jedním z důvodů aplikace tohoto přístupu byla ještě do nedávné minulosti nedostatečná počítačová podpora, která by umožňovala řešení uvedeného problému. Současná výpočtová síla solverů a matematického aparátu max-plus algebry nabízí možnost tvorby robustních matematických modelů pro synchronizaci technologických omezení dopravců i požadavků cestující veřejnosti. Na jejich ověření se ukazují perspektivními časově závislé Petriho sítě, které díky vizualizaci poskytují dopravním inženýrům poměrně pohodlnou možnost detailní analýzy kritických událostí např. čekání cestujících v přepravních špičkách anebo jízd nevytížených vozidel v přepravních sedlech.

Tato práce je zaměřena na volně dostupnou výpočetní sílu optimalizačních solverů založených na matematickém aparátu max-plus algebry. Nový přístup je možné uplatnit především při tvorbě linek, úpravách stávající dopravní sítě MHD a při různých analýzách provozu. Nároky na správné a efektivní rozhodnutí jsou o to větší, že je nutné zohlednit velké množství aspektů a místní specifika. Obecně platí, že nejlepších výsledků je dosaženo v kombinaci tvůrčího myšlení a výpočetní techniky. V současnosti existují počítačové programy, avšak dostupnost a finanční náročnost neumožňuje větší využití především optimalizačních softwarů. V této souvislosti tvoří překážku také potřebné znalosti kladené na uživatele. Nový přístup založený na Petriho sítích v kombinaci s aparátem max-plus algebry umožňuje simulovat a vyhodnocovat možné návrhy při znalosti základních pravidel Petriho sítí a způsobu zápisu změn stavu systému rovnicemi max-plus algebry. Největší výhodou je srozumitelný koncept Petriho sítí a zápis reálných omezení a technologických požadavků prostřednictvím rovnic max-plus algebry. V neposlední řadě předložená práce nabízí možnost využití otevřeného software.

2 CÍLE DISERTAČNÍ PRÁCE

Disertační práce s názvem „Modely synchronizace systémů linek v MHD“ se zabývá možnostmi matematického modelování synchronizace JŘ systému linek MHD při redukci počtu linek.

2.1 Cíle práce

- Analyzovat dostupné přístupy k synchronizaci systémů linek.
- Navrhnout modely základních typů synchronizace linek.
- Formulovat matematické modely výpočtu jízdních řádů na synchronizovaných linkách.
- Ověřit správnost navrhnutých modelů počítačovými experimenty.

2.2 Osnova práce

1. Úvod
2. Cíle disertační práce
3. Současný stav teorie tvorby synchronizovaných linek MHD
4. Potřebné matematické pojmy a tvrzení
5. Modely základních typů synchronizovaných linek
6. Vyhodnocení experimentů na reálných datech
7. Použité softwarové nástroje
8. Závěr

3 SOUČASNÝ STAV ŘEŠENÍ PROBLEMATIKY

K řešení problému časové koordinace spojů v přestupních uzlech je možno přistoupit různými způsoby. Nejčastěji je využíván tzv. zkušenostní přístup, kdy pověření zaměstnanci dopravců zajišťují možnosti přestupu na vybraných přestupních zastávkách zpravidla na základě svých logických úvah vyplývajících z historicky vzniklých přestupních vazeb. Jedná se o změny časových poloh příjezdů a odjezdů spojů synchronizovaných linek na vybraných přestupních zastávkách mezi relacemi bez přímého spojení, kdy je k časové koordinaci přihlíženo přímo při sestavě jízdních řádů. Tyto změny mohou vycházet např. z úpravy oběžných dob, resp. dílčích hodnot technologických parametrů tak, aby počet oběhů za hodinu na vybraných linkách činil 1 za účelem zpravidelnění přepravní příležitosti (intervalové dopravy) na linkách MHD a modifikace časů odjezdů z výchozích zastávek ve vztahu k jízdní době (dojezdové vzdálenosti) k přestupnímu uzlu.

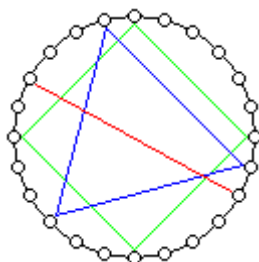
Jak již bylo uvedeno je v současnosti nejčastěji využíván tzv. zkušenostní přístup. Exaktní přístup k této problematice je využíván především v oblasti výzkumu. V minulosti bylo v tuzemsku vytvořeno několik přístupů. Jedná se např. o heuristickou metodu pravidelných n -úhelníků na kružnici a modely lineárního programování. V zahraničí byla pozornost věnována také možnostem simulace a vizualizace v Petriho sítích, kde změny stavu lze popsat aparátem max-plus algebry.

3.1 Heuristické metody

Mezi metody heuristické patří metoda pravidelných n -segmentů na kružnici [21] známá jako tzv. úloha o žilinských n -úhelnících. Uvedený přístup lze uplatnit při souběhu linek na společných úsecích, což je velmi častý jev ve větších městech, tento případ se však může vyskytnout také v menších městech se specifickým linkovým vedením. Při těchto podmínkách vzniká problém koordinace JŘ těchto linek, tak aby ztráty cestujících, kteří mohou využít kteroukoli linku, byly minimální.

Při řešení této úlohy lze vyjít z geometrického znázornění, které bude patrné z následujícího příkladu. Na společném úseku jsou v provozu 3 linky. Intervaly na linkách jsou: linka 1 – 12 minut, linka 2 – 8 minut a linka 3 – 6 minut. Nejmenší společný násobek těchto intervalů, který představuje periodu, po které se bude vzájemné rozložení odjezdů opakovat činí 24 minut. Dané vzájemné rozložení lze znázornit na kružnici rozdělené na 24 stejných dílků, kde dále znázorníme odjezdy linky 1 – vrcholy pravidelného vepsaného dvojúhelníku

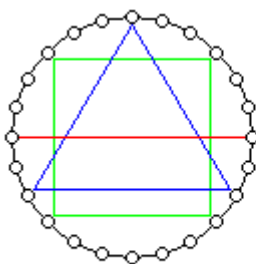
(úsečky), linky 2 – vrcholy vepsaného rovnostranného trojúhelníku a linky 3 – vrcholy vepsaného čtverce. Grafické znázornění je uvedeno na obr. č. 1.



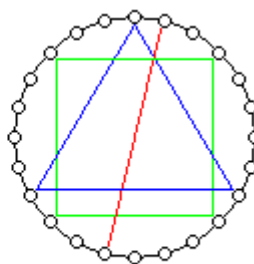
Obr. č. 1: Znázornění odjezdů na společném úseku pravidelnými vepsanými n -úhelníky

Kriterium optimality vzájemné polohy uvedených obrazců, které obecně představují pravidelné n -úhelníky vepsané do společné kružnice vychází z požadavku na co největší minimální odlehlost sousedních vrcholů n -úhelníků.

Uvedený příklad má více řešení a podle okolností je možné vybrat variantu, která lépe vyhoví dalším určujícím požadavkům. Na obr. č. 2 jsou uvedena dvě řešení, v legendě jsou uvedeny získané intervaly posuzované od nejvyššího vrcholu vpravo. V obou se vychází ze skutečnosti, že čtverec proti trojúhelníku nelze natočit tak, aby vzájemná vzdálenost nejbližších vrcholů (měřené na kružnici) byla větší než 1. Natočením úsečky lze v řešení B) ve srovnání s A) zkrátit nejdelší dobu mezi spoji ze 6 na 5 minut, ovšem za cenu zhoršení jisté rovnoměrnosti ostatních intervalů. V případě, kdy je optimalizačním kritériem maximální interval (odlehlost), který je minimalizován tedy nabízí uspokojivé suboptimální řešení varianta B.



A) 3-3-2-1-6-1-2-3-3



B) 1-2-5-1-4-2-1-5-3

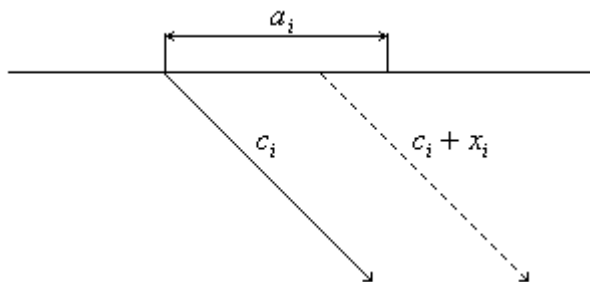
Obr. č. 2: Dvě varianty řešení příkladu

3.2 Lineární programování

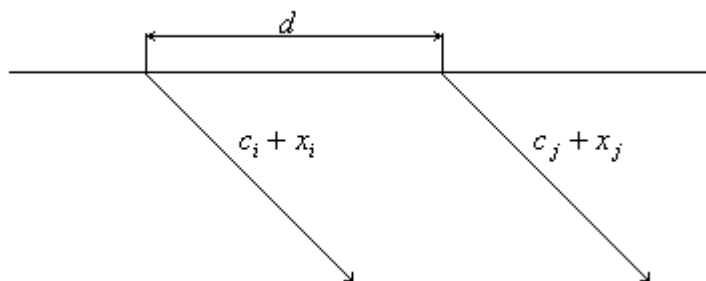
V rámci procesu optimalizace MHD v tuzemsku i zahraničí jsou pro podporu rozhodování využívány matematické modely, které využívají pokročilé metody operačního výzkumu. Problémy časové koordinace spojů na základě dovolených časových posunů příjezdů a odjezdů spojů lze formulovat a řešit jako úlohy smíšeného lineárního programování [5,9].

Dále bude uveden LP model přestupního uzlu sestaveného v minulosti řešitelským kolektivem Výzkumného ústavu dopravního v Žilině, Černý a kol. Na tento model se budu odkazovat v kapitole 5.1 a ukáži jak ho lze alternativně řešit pomocí lineárního systému max-plus rovnic.

Jsou dány uspořádané n -tice (a_1, \dots, a_n) a (c_1, \dots, c_n) , kde a_i je maximální posun i -tého spoje a c_i čas odjezdu i -tého spoje. Tato situace je znázorněna na obr. č. 3. Hledá se uspořádaná n -tice (x_1, \dots, x_n) , kde x_i je přípustný posun i -tého spoje a d rozdíl mezi odjezdy sousedních spojů, grafické znázornění je uvedeno na obr. č. 4.



Obr. č. 3: Znázornění případného posunu odjezdu i -tého spoje



Obr. č. 4: Znázornění časového rozdílu mezi i -tým a j -tým spojem

Při řešení reálných problémů nelze připustit získání optimálního řešení, které by uvažovalo s neceločíselnými časovými posuny. Z uvedeného důvodu je nutno, aby v modelu byl akceptován požadavek na celočíselnost proměnné x_i . Obligatoční podmínka tedy bude mít tvar: $x_i \in Z^+$, pro $i = 1, \dots, n$ kde Z^+ je množina celých nezáporných čísel. Zavedením požadavku na celočíselnost proměnné x_i je rovněž ošetřena i celočíselnost proměnné d .

Matematický model má tvar:

$$\max d \quad (1)$$

za podmínky:

$$x_{i+1} - x_i \geq c_i - c_{i+1}, \quad \text{pro } i = 1, \dots, n-1 \quad (2)$$

$$x_{i+1} - x_i - d \geq c_i - c_{i+1}, \quad \text{pro } i = 1, \dots, n-1 \quad (3)$$

$$x_i \leq a_i, \quad \text{pro } i = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$x_i \in Z^+, \quad \text{pro } i = 1, \dots, n \quad (5)$$

$$d \geq 0, \quad (6)$$

Výraz (1) reprezentuje účelovou funkci a podmínka (2) zajišťuje, že časový rozdíl mezi dvojicemi sousedních spojů po zpracování případných posunů nebude menší než 0. Podmínka (3) zajišťuje, že tento rozdíl nebude menší než hodnota minimálního rozdílu d . Další podmínka (4) zajišťuje, že posun i -tého spoje se uskuteční v dovořených mezích. Podmínky (5), (6) jsou obligatočními podmínkami.

Jsou-li c_i , a_i celočíselné pak z podmínek (2) - (4) ještě neplyne, že i bazické řešení bude vždy celočíselné po relaxační podmínky (5) podmínkou $x_i \geq 0$.

3.3 Petriho síť

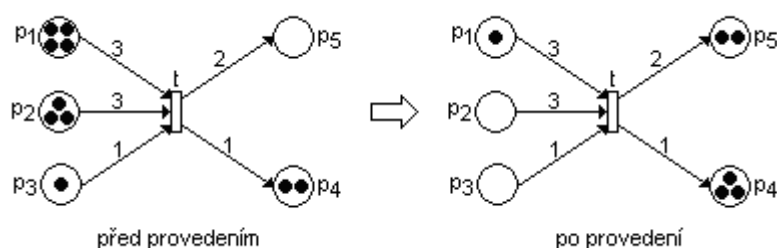
V současné době se mezi modelovacími technikami prosazují také Petriho sítě, které mají značně široké uplatnění. Petriho sítě se dostaly do popředí zájmu v souvislosti s aplikacemi pro modelování a teoretické zkoumání distribučních a paralelních systémů, jako jsou komunikační protokoly, počítačové sítě či databázové systémy.

Petriho síť představují významný formalismus pro modelování diskretních systémů, který spojuje výhody srozumitelného grafického zápisu a možnosti simulace s dobrou formální analyzovatelností. Srozumitelnost a analyzovatelnost Petriho sítí je dána jejich jednoduchostí. Model je popsán místy (*places*), která obsahují stavovou informaci ve formě značek (*tokens*), přechody (*transitions*), které vyjadřují možné změny stavu a hranami (*arcs*), propojujícími místa a přechody navzájem. Existuje celá řada typů Petriho sítí a jejich speciálních podtřídy, až po vysokoúrovňové (*High-Level Petri nets*) a barevné sítě [8].

Jak je uvedeno např. v [10], využívají Petriho sítě ke své výstavbě následující koncept:

Parciální stavy systému jsou modelovány místy a možné jevy, které jsou aktivátorem změny, jsou definovány přechody. Okamžitý stav systému je definován umístěním značek (*tokens*) v místech, což se v grafu Petriho sítě vyjadřuje tečkami v místech. Přítomnost tokenu v místě modeluje skutečnost, že daný stav je momentálně aktuální. Každý přechod má definována vstupní a výstupní místa, což je v grafu Petriho sítě vyjádřeno orientovanými hranami mezi místy a přechody. Tím je dáno, které aspekty stavu systému podmiňují výskyt odpovídající události (provedení přechodu), a které aspekty stavu jsou výskytem této události ovlivněny.

Pro každý přechod jsou definovány vstupní a výstupní podmínky. Přechod může být proveden pouze v případě, že všechna jeho vstupní místa obsahují značky, tj. má splněny všechny vstupní podmínky. Provedením přechodu se odstraní značky ze vstupních míst (vstupní podmínky přestanou platit) a umístí se nové značky do výstupních míst (uplatní se výstupní podmínky). Příklad změny stavu je znázorněn na obr. č. 5.



Obr. č. 5: Příklad změny stavu po provedení přechodu v P/T Petriho síti

Implicitně předpokládáme násobnost hrany 1 a kapacitu místa nekonečnou. Násobnost jednoduchých hran ($w=1$) a kapacitu kapacitně neomezených míst ($K=\infty$) na grafech Petriho sítí není nutné uvádět, především kvůli větší přehlednosti.

3.4 Max-plus algebra

V kombinaci s nástrojem Petriho sítí bývá často využíváno matematického aparátu max-plus algebry, kdy je Petriho sítí využito k simulaci a ověření správnosti navrženého modelu zapsaného prostřednictvím matematické teorie max-plus algebry.

V oblasti výzkumu se max-plus algebra objevila jako vědecký přístup k rozhodování v roce 1950. Většina problémů v operačním výzkumu zahrnuje hledání optima. Max-plus algebra využívá k hledání maxima matematické operace a proto je vhodným kandidátem pro matematický popis problémů v oblasti operačního výzkumu. V operačním výzkumu jsou problémy nejčastěji řešeny vývojem algoritmických postupů, které vedou k optimálnímu řešení. Max-plus algebra představuje matematický aparát ve kterém jsou klasické aritmetické operace sčítání a násobení nahrazeny následujícími operacemi $a \oplus b = \max(a, b)$ a $a \otimes b = a + b$. Uvedený matematický přístup nabízí zajímavý způsob vhodný pro modelování systémů diskrétních událostí (DES) a optimalizace problémů ve výrobě a dopravě. Navíc se ukazuje silná podobnost s klasickou lineární algebrou, což umožňuje například zohlednění soustav lineárních rovnic a problematiky vlastního čísla [1], [3].

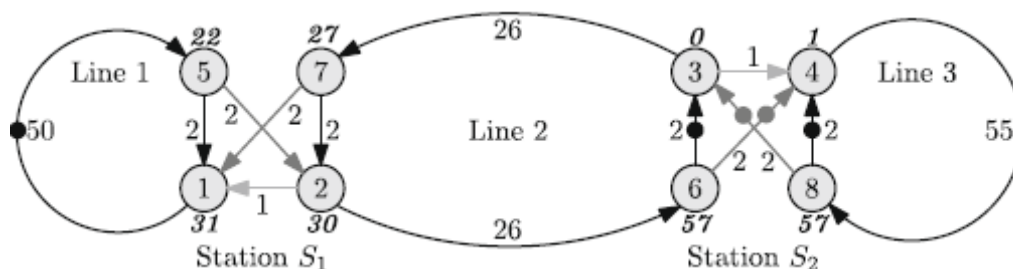
K teorii max-plus algebry existuje v současné době velké množství zahraniční literatury. Z hlediska teoretické analýzy max-plus algebry je nejvíce prostoru věnováno v publikacích [1], [2], [3].

Literatura [1], [3] popisuje matematickou teorii max-plus algebry, která poskytuje jednotný přístup k řešení mnoha problémů, které se vyskytují v oblasti operačního výzkumu a zároveň obsahuje několik aplikací této teorie s detailními příklady dopravních sítí, projektového plánování a komunikací.

Mezi nejvýznamnější a velmi rozsáhlé publikace v oblasti max-plus nelineárního programování a synchronizace patří literatura [2], která obsahuje široké spektrum okruhů mezi které patří systémy diskrétních událostí, Petriho sítě, algebra, deterministické a stochastické systémy.

K první významné aplikaci max-plus algebry v Evropě došlo v Nizozemsku, kde byla provedena rozsáhlá návrhová studie v železniční dopravě. Tato studie se věnuje analýze stability jízdního řádu nizozemské státní železnice a ilustruje potenciál vyspělé metodiky pro podporu navrhování spolehlivých jízdních řádů v husté železniční dopravě. Tento přístup je založen na skutečnosti, že u vysoce provázaných jízdních řádů nebo v husté železniční dopravě může zpoždění jednoho vlaku zapříčinit dominový efekt sekundárních zpoždění v celé železniční síti, což je hlavní obavou tvůrců GVD a dispečerů vlakové dopravy.

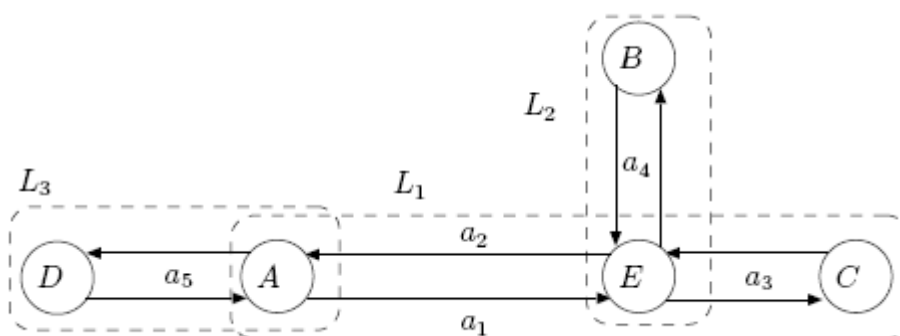
Příklad jednoduché sítě, která se skládá ze dvou hlavních stanic a tří železničních tratí je uveden na obr. č. 6.



Obr. č. 6: Příklad železniční sítě

Bližší seznámení s uvedenou studií nabízí článek [6], který popisuje teorii stability k analýze jízdních řádů na citlivost a odolnost na zpoždění založené na lineárním popisu jízdního řádu v max-plus algebře. Model zahrnuje vzájemnou závislost vlaků v dopravní síti vyplývající z jízdního řádu, logistiky a sdílené infrastruktury. Stabilita je chápána jako samoregulační chování železničního systému při návratu jízdního řádu do ustáleného stavu po přerušení. Navrhovaný přístup vyhodnotí spolehlivost a stabilitu jízdního řádu pomocí max-plus spektrální analýzy a algoritmů kritické cesty. Max-plus algebra umožňuje analýzu rozsáhlých periodických železničních jízdních řádů v reálném čase.

Další příklad aplikace rovnic max-plus algebry představuje práce [15], která je zaměřena na modelování jízdních řádů autobusových linek v dopravní síti MHD, resp. stanovení časů odjezdů spojů synchronizovaných linek v přestupním uzlu. Schéma modelové dopravní sítě MHD se dvěma přestupními uzly je uvedeno na obr. č. 7.



Obr. č. 7: Schéma modelové dopravní sítě

Formulace matematického modelu max-plus algebry při řešení synchronizačního problému v modelové dopravní síti znázorněné na obr. č. 7.

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= a_2(k) \otimes x_2(k) \oplus a_5(k) \otimes x_5(k), \\x_2(k+1) &= a_3(k) \otimes x_3(k) \oplus a_4(k) \otimes x_4(k), \\x_3(k+1) &= a_1(k) \otimes x_1(k) \oplus a_4(k) \otimes x_4(k), \\x_4(k+1) &= a_1(k) \otimes x_1(k) \oplus a_3(k) \otimes x_3(k) \oplus a_4(k) \otimes x_4(k), \\x_5(k+1) &= a_2(k) \otimes x_2(k) \oplus a_5(k) \otimes x_5(k).\end{aligned}$$

Další z publikací zabývajících se modelováním pohybu vozidel v dopravní síti je literatura [11], [12]. V těchto publikacích je pozornost věnována řešení konfliktů v modelu Petriho sítě s využitím max-plus algebry. Popisují možný postup, který by umožňoval řešit a rozhodovat konflikty v Petriho sítích. Uvedený přístup je ilustrován na modelové dopravní síti MHD s okružními linkami, což představuje určité omezení. Cílem je analyzovat a vyhodnotit provozní vlastnosti modelové dopravní sítě.

Podobně, jako v předchozím případě je v literatuře [22] pozornost věnována modelování a analýze železniční sítě. Prostřednictvím nelineárního modelu max-plus algebry je možné zohlednit synchronizační omezení a vypočítat časy odjezdů spojů na synchronizovaných linkách v přestupním uzlu. Na rozdíl od předchozího modelu je zde uvažováno s radiálními a diagonálními linkami.

Praktický přístup k modelování dopravní sítě nabízí také publikace [13]. Tato práce se zabývá hodnocením systému veřejné dopravy v souvislosti s čekacími dobami na přestupních zastávkách. Provoz vozidel v dopravní síti je popsán ve dvou provozních režimech – pravidelném a nepravidelném. K popisu je využito vzájemně se doplňujících nástrojů – Petriho sítě a nelineárního stavového modelu max-plus algebry. Analogicky, jako v předchozích případech nabízí uvedený přístup řešení konfliktů spojené s grafickou reprezentací.

Na řešení praktických příkladů v oblasti modelování provozu dopravní sítě s využitím uvedených nástrojů je zaměřena také literatura [14], [16].

Shrnutí

V případě heuristické metody je určitým omezením skutečnost, že není zaručeno nalezení optimálního řešení, výhodou je však jednoduchost řešení. Lineární programování nabízí vhodný nástroj i pro rozsáhlejší modely, tento přístup zároveň představuje zvýšené nároky na přípravu a strukturu vstupních dat. Oba uvedené přístupy slouží ke zrovnoměnění odjezdů na společných úsecích ale v současnosti neexistuje plnohodnotný nástroj pro řešení synchronizace navazujících spojů.

Potenciální nástroj představují Petriho sítě a spektrální analýza max-plus algebry, který byl aplikován při analýze stability jízdního řádu nizozemské státní železnice. Stejný přístup je možné aplikovat v podmínkách MHD, kde existuje analogie na provázanost spojů, především pak v přestupních uzlech. Výhodou tohoto přístupu je charakteristika vstupních údajů, kterými jsou základní technologické parametry (jízdní doby, doby oběhu), srozumitelná forma zápisu a dostupný software.

4 POTŘEBNÉ MATEMATICKÉ POJMY A TVRZENÍ

V této kapitole se omezím na potřebný matematický aparát, kterého bude využito při dále prezentovaném přístupu k řešení problematiky. Výběr byl motivován reálnými potížemi dispečerů MHD Prostějov synchronizovat JŘ v případě redukce autobusových linek.

4.1 Max-plus algebra

Chování mnohých časově diskrétních dynamických systémů [7] je možné popsat pomocí maticové algebry s binárními operacemi maximum a součet.

Předpokládejme, že se operace v nějakém systému vykonávají v cyklech a skládají se z realizace n navzájem provázaných úloh s jednou operací. Necht' a_{ij} udává dobu trvání operace úlohy j potřebné k vykonání úlohy i . Jestliže úloha i nepotřebuje bezprostředně vykonání úlohy j potom je $a_{ij} = -\infty$. Necht' vektor $\mathbf{x}(k) = (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))$ označuje okamžiky začátků v k -té etapě vývoje systému. Nakolik každá úloha čeká na ukončení operací všech předchozích úloh v cyklu je nejdříve možný okamžik začátku úloh v $k+1$ etapě cyklu určený vektorem $\mathbf{x}(k+1)$, kde

$$x_i(k+1) = \max\{a_{i1} + x_1(k), a_{i2} + x_2(k), \dots, a_{in} + x_n(k)\} \quad (7)$$

V následujících odstavcích se omezím pouze na základní pojmy a tvrzení potřebné pro výklad a řešení použitých max-plus dopravních modelů, jejichž chování bude popsáno rovnicemi (7).

4.1.1 Základní pojmy

V dalším textu budu používat následující definice a označení převzaté z [7]. Necht' $\mathcal{E} = -\infty$, $\mathfrak{R}_{\max} = \mathfrak{R} \cup \{\mathcal{E}\}$, kde \mathfrak{R} je množina reálných čísel.

Max-plus algebra je algebraický systém $(\mathfrak{R}_{\max}, \oplus, \otimes)$ na množině \mathfrak{R}_{\max} s binárními operacemi \oplus a \otimes definovanými pro $a, b \in \mathfrak{R}_{\max}$

$$a \oplus b = \max(a, b),$$

$$a \otimes b = a + b,$$

Pro všechny prvky $a \in \mathfrak{R}_{\max}$ platí $\max(a, -\infty) = \max(-\infty, a) = a$ a $a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty$ a tak

$$a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a, \quad a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon,$$

Operace \oplus a \otimes mohou být rozšířeny na matice $\mathbf{A}=(a_{ij})$, $\mathbf{B}=(b_{ij})$ a $\mathbf{C}=(c_{ij})$ s prvky v \mathfrak{R}_{\max} kompatibilních rozměrů.

$$\mathbf{C}=\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}, \quad c_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \max(a_{ij}, b_{ij})$$

$$\mathbf{C}=\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}, \quad c_{ij} = \sum_k^{\oplus} a_{ik} \otimes b_{kj} = \max(a_{ik} + b_{kj})$$

Jednotkovou maticí $\mathbf{E}=(e_{ij})$ je čtvercová matice s prvky $e_{ii}=0$ na diagonále jinak $e_{ii}=\varepsilon$.

Dále budu značit množinu všech matic v \mathfrak{R}_{\max} typu $m \times n$ symbolem $\mathfrak{R}_{\max}(m, n)$ a množinu všech n sloupcových vektorů v \mathfrak{R}_{\max} symbolem $\mathfrak{R}_{\max}(n)$.

Podobně jako v konvenční lineární algebře má také v max-plus algebře smysl řešit různé typy systémů lineárních rovnic.

4.1.2 Spektrální analýza

Vývoj systémů popsaných rovnicemi (7) je možné zapsat vektorovými rovnicemi max-plus algebry ve tvaru

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{x}(k). \quad (8)$$

Konečné číslo λ a vektor $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}_{\max}(n)$ s nejméně jedním konečným prvkem se nazývají vlastní hodnota a vlastní číslo matice $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}_{\max}(n, n)$ jestliže

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \lambda \otimes \mathbf{x}. \quad (9)$$

Věta 1 (Bacceli et al [2]) Necht' $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}_{\max}(n, n)$ potom pro všechna $k \geq 1: (A^{\otimes k})_{ji} = \max\{|p|_{\omega} : p \in P(i, j; k)\}$ kde $(A^{\otimes k})_{ji} = \varepsilon$ v případě, kdy $P(i, j; k)$ je prázdná, tzn. v $\mathcal{D}_A(\mathbf{A})$ neexistuje cesta z vrcholu i do vrcholu j o délce k .

Pro možnost poměrně jednoduše formulovatelných charakteristik ale i vizualizace čtvercových max-plus matic se definuje přidružený graf matice následovně: Komunikačním grafem matice $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}_{\max}(n, n)$ rozumíme hranově ohodnocený orientovaný graf $\mathcal{D}_{\mathbf{A}} = (V, H, \omega)$ s množinou vrcholů $V = \{1, 2, \dots, n\}$, množinou hran $H = \{(i, j) \in V \times V : a_{ij} \neq \varepsilon\}$, a ohodnocením hran $\omega: V \rightarrow \mathfrak{R}$ takovým, že $\omega(i, j) = a_{ij}$ pro všechny $(i, j) \in E$.

Jsou-li vrcholy i_1, i_2, \dots, i_p sledu π různé hovoříme o cyklu, $\pi = (i_1, i_2, \dots, i_p, i_1)$ označuje sled v $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}$ délky $l(\pi) = p$. Potom ohodnocení π je $\omega(\pi, A) = a_{i_1 i_2} \otimes a_{i_2 i_3} \otimes \dots \otimes a_{i_p i_1}$. Necht' má $D_{\mathbf{A}}$ aspoň jeden cyklus. Symbolem $\lambda(\mathbf{A})$ je označováno ohodnocení maximálního průměrného cyklu matice \mathbf{A}

$$\lambda(A) = \max_{\pi} \frac{\omega(\pi, A)}{l(\pi)},$$

kde se maximum hledá přes všechny cykly komunikačního grafu $D_{\mathbf{A}}$.

Matice $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}_{\max}(n, n)$ je nerozložitelná, jestliže je její komunikační graf $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}$ silně souvislý tj. mezi každou dvojicí vrcholů i a j existuje orientovaný sled z vrcholu i do vrcholu j .

Věta 2 (Bacceli et al [2]) Necht' $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}_{\max}(n, n)$ je ireducibilní potom existuje jedno a pouze jedno vlastní číslo (s několika možnými vlastními vektory). Tato vlastní hodnota je rovna ohodnocení maximálního průměrného cyklu v $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}$.

Cuningham-Green (citováno v [4]), jako první zjistili, že pro nerozložitelné matice \mathbf{A} existuje právě jedna vlastní hodnota rovna $\lambda(\mathbf{A})$. Později dokázali, že $\lambda(\mathbf{A})$ je hodnotou účelové funkce optimálního řešení následující úlohy lineárního programování

$$\begin{aligned} \lambda &\rightarrow \min \\ \lambda + x_i - x_j &\geq a_{ij} & \forall (i, j) \in H \\ x_i &\geq 0 & \forall i \in V \end{aligned}$$

Praktičtější algoritmus $O(n^3)$ představuje Karpův algoritmus [7]. V článku [4] je uvedeno, že $\lambda(\mathbf{A})$ je možné vypočítat ve skoro lineárním čase Howardovým algoritmem.

Věta 3 (Cechlárová [4]) Necht' $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}_{\max}(n, n)$ je matice. Pak nerovnost

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} \leq \mu \otimes \mathbf{x} \tag{10}$$

je řešitelná tehdy a jen tehdy $\mu \geq \lambda(\mathbf{A})$.

5 MODELY ZÁKLADNÍCH TYPŮ SYNCHRONIZOVANÝCH LINEK

V této kapitole se budu věnovat modelům ve kterých jsou linky obsluhovány pouze jedním vozidlem a také modelům s více vozidly. V případě modelu zahrnujícího více vozidel je pro jednoduchost výkladu uvažován předpoklad, že vozidla nemění linku. Modely jsou inspirovány reálnými potřebami racionalizace MHD Prostějov.

5.1 Max-plus modely synchronizace linek

K synchronizaci odjezdů spojů vybraných linek v podmínkách MHD Prostějov bude využito soustavy rovnic max-plus algebry, která patří mezi nelineární úlohy.

Každá model vyžaduje před vlastním řešením určitý objem vstupních údajů.

Vstupními údaji pro uvedenou aplikaci jsou:

- požadavek na přestup v dané relaci
- provozní parametry a jízdní doby mezi zastávkami na synchronizovaných linkách,
- výchozí zastávky na linkách
- každá linka je obsluhována jedním vozidlem.

Požadavek na přestup vychází z potřeb praxe. Údaje o provozních parametrech jednotlivých linek a jízdní doby budou čerpány z interních informací dopravce a JŘ. Při sestavě rovnic je třeba zvolit na každé z linek výchozí zastávku, ke které bude vztažen pohyb vozidla.

Každý model se skládá ze soustavy rovnic. Pro sestavení rovnic platí určitá pravidla:

- shodné intervaly na linkách
- nutnost zohlednit alespoň dva předchozí příjezdy
- zajistit v každé rovnici provázanost s výchozí zastávkou,

Dále se budu soustředit na následující max-plus modely synchronizace linek:

- pro dvě diametrální linky
- pro dvě okružní linky
- pro více linek v síti

5.1.1 Parametry a proměnné

Při modelování synchronizace linek znázorněných na obr. č. 8, 11, 14 jsou použity následující proměnné a parametry.

Parametry:

- Z - množina zastávek,
- n - počet relací,
- a_i - výchozí zastávka v i -té relaci,
- b_i - cílová zastávka v i -té relaci,
- (a_i, b_i) - i -tá relace,
- t_i - jízdní doba v i -té relaci,
- R - množina relací, $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)\}$,
- l_q - interval na q -té lince.
- o_q - oběžná doba na lince q .
- n_q - počet vozidel na lince q .

Proměnné:

- $x_i(k)$ - k -tý synchronizovaný odjezd v i -té relaci,
- λ - délka maximálního průměrného cyklu mezi odjezdy z jedné resp. více zastávek.

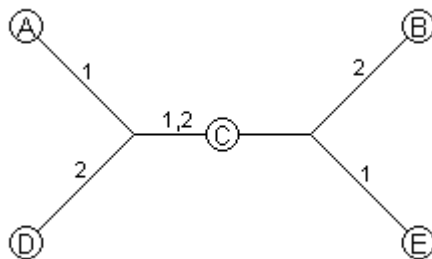
Dohoda:

Pro snadnější orientaci v modelech se dále při odvozování modelu nahrazuje index relace samotnou relací.

Např. je-li první relací A,C bude místo $x_1(k)$ napsáno $x_{A,C}(k)$, místo t_1 se píše $t_{A,C}$.

5.1.2 Model synchronizace pro dvě diametrální linky

Při modelování synchronizace diametrálních linek 1 a 2 znázorněných na obr. č. 8 jsou použity výše uvedené proměnné a parametry. V daném případě množina zastávek $Z = \{A, B, C, D, E\}$ obsahuje konečné zastávky A, B, D, E a přestupní zastávku C.



Obr. č. 8: Schéma dvou diametrálních linek

Systém rovnic zajišťující přestup mezi linkami 1 a 2 na zastávce C pro jedno vozidlo

$$x_{A,C}(k+1) = \max(x_{A,C}(k) + l_1, x_{C,A}(k) + t_{C,A}) \quad (11)$$

$$x_{C,A}(k+1) = \max(x_{A,C}(k) + t_{A,E} + t_{E,C}, x_{B,C}(k) + t_{B,C}, x_{D,C}(k) + t_{D,C}, x_{E,C}(k) + t_{E,C}) \quad (12)$$

$$x_{B,C}(k+1) = \max(x_{C,B}(k) + t_{C,B}, x_{D,C}(k) + t_{D,B}) \quad (13)$$

$$x_{C,B}(k+1) = \max(x_{A,C}(k) + t_{A,C}, x_{D,C}(k) + t_{D,C}, x_{E,C}(k) + t_{E,C}) \quad (14)$$

$$x_{D,C}(k+1) = \max(x_{D,C}(k) + l_2, x_{C,D}(k) + t_{C,D}) \quad (15)$$

$$x_{C,D}(k+1) = \max(x_{A,C}(k) + t_{A,C}, x_{B,C}(k) + t_{B,C}, x_{D,C}(k) + t_{D,B} + t_{B,C}, x_{E,C}(k) + t_{E,C}) \quad (16)$$

$$x_{E,C}(k+1) = \max(x_{A,C}(k) + t_{A,E}, x_{C,E}(k) + t_{C,E}) \quad (17)$$

$$x_{C,E}(k+1) = \max(x_{A,C}(k) + t_{A,C}, x_{B,C}(k) + t_{B,C}, x_{D,C}(k) + t_{D,C}) \quad (18)$$

Úpravou systému rovnic (11) - (18) byly sestaveny rovnice (19) - (26) max-plus modelu:

$$x_{A,C}(k+1) = (x_{A,C}(k) \otimes l_1) \oplus (x_{C,A}(k) \otimes t_{C,A}) \quad (19)$$

$$x_{C,A}(k+1) = (x_{A,C}(k) \otimes t_{A,E} \otimes t_{E,C}) \oplus (x_{B,C}(k) \otimes t_{B,C}) \oplus (x_{D,C}(k) \otimes t_{D,C}) \oplus (x_{E,C}(k) \otimes t_{E,C}) \quad (20)$$

$$x_{B,C}(k+1) = (x_{C,B}(k) \otimes t_{C,B}) \oplus (x_{D,C}(k) \otimes t_{D,B}) \quad (21)$$

$$x_{C,B}(k+1) = (x_{A,C}(k) \otimes t_{A,C}) \oplus (x_{D,C}(k) \otimes t_{D,C}) \oplus (x_{E,C}(k) \otimes t_{E,C}) \quad (22)$$

$$x_{D,C}(k+1) = (x_{D,C}(k) \otimes l_2) \oplus (x_{C,D}(k) \otimes t_{C,D}) \quad (23)$$

$$x_{C,D}(k+1) = (x_{A,C}(k) \otimes t_{A,C}) \oplus (x_{B,C}(k) \otimes t_{B,C}) \oplus (x_{D,C}(k) \otimes t_{D,B} \otimes t_{B,C}) \oplus (x_{E,C}(k) \otimes t_{E,C}) \quad (24)$$

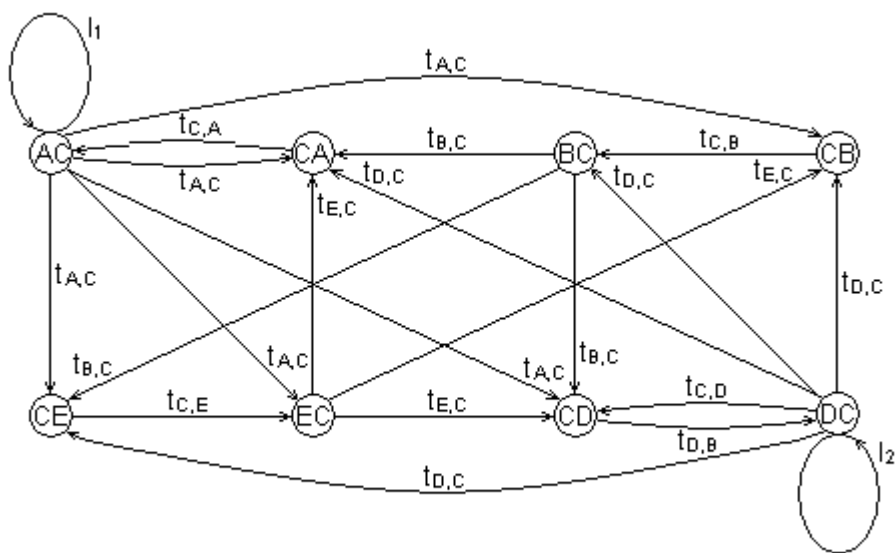
$$x_{E,C}(k+1) = (x_{A,C}(k) \otimes t_{A,E}) \oplus (x_{C,E}(k) \otimes t_{C,E}) \quad (25)$$

$$x_{C,E}(k+1) = (x_{A,C}(k) \otimes t_{A,C}) \oplus (x_{B,C}(k) \otimes t_{B,C}) \oplus (x_{D,C}(k) \otimes t_{D,C}) \quad (26)$$

Tak lze odvodit matici systému A (27) pro model synchronizace diametrálních linek pro jedno vozidlo, podle kterého byl vytvořen komunikační graf (obr. č. 10).

$$A = \begin{matrix} & (A,C) & (C,A) & (B,C) & (C,B) & (D,C) & (C,D) & (E,C) & (C,E) \\ \begin{matrix} (A,C) \\ (C,A) \\ (B,C) \\ (C,B) \\ (D,C) \\ (C,D) \\ (E,C) \\ (C,E) \end{matrix} & \begin{pmatrix} l_1 & t_{C,A} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & t_{B,C} & \varepsilon & t_{D,C} & \varepsilon & t_{E,C} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & t_{C,B} & t_{D,B} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ t_{A,C} & \varepsilon & t_{B,C} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & t_{E,C} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & l_2 & t_{C,D} & \varepsilon & \varepsilon \\ t_{A,C} & \varepsilon & t_{B,C} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & t_{E,C} & \varepsilon \\ t_{A,E} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & t_{C,E} \\ t_{A,C} & \varepsilon & t_{B,C} & \varepsilon & t_{D,C} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (27)$$

Na obr. č. 9 je znázorněn komunikační graf, ze kterého je zřejmé, že mezi každou dvojicí různých vrcholů existuje orientovaná cesta a jedná se tedy silně souvislý graf. Pak je matice systému regulární a podle věty 2 platí, že vlastní hodnota matice je určena jednoznačně.



Obr. č. 9: Komunikační graf pro model diametrálních linek při obsluze jedním vozidlem

Systém rovnic zajišťující přestup mezi linkami 1 a 2 na zastávce C pro více vozidel

V tomto modelu navíc předpokládám, že pro každou linku k existuje disponibilní počet vozidel n_k a platí $n_1 + n_2 \geq 3$.

$$x_{A,C}(k+1) = \max \left(x_{A,C}(k) + \frac{o_q}{n_q}, x_{C,A}(k) + \min \left(t_{C,A}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (28)$$

$$x_{C,A}(k+1) = \max \left(x_{A,C}(k) + \min \left(t_{A,E} + t_{E,C}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{B,C}(k) + \min \left(t_{B,C}, \frac{o_q}{n_q} \right), \right. \quad (29)$$

$$\left. x_{D,C}(k) + \min \left(t_{D,C}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{E,C}(k) + \min \left(t_{E,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right)$$

$$x_{B,C}(k+1) = \max \left(x_{C,B}(k) + \min \left(t_{C,B}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{D,C}(k) + \min \left(t_{D,B}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (30)$$

$$x_{C,B}(k+1) = \max \left(x_{A,C}(k) + \min \left(t_{A,C}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{D,C}(k) + \min \left(t_{D,C}, \frac{o_q}{n_q} \right), \right. \quad (31)$$

$$\left. x_{E,C}(k) + \min \left(t_{E,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right)$$

$$x_{D,C}(k+1) = \max \left(x_{D,C}(k) + \frac{o_q}{n_q}, x_{C,D}(k) + \min \left(t_{C,D}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (32)$$

$$x_{C,D}(k+1) = \max \left(x_{A,C}(k) + \min \left(t_{A,C}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{B,C}(k) + \min \left(t_{B,C}, \frac{o_q}{n_q} \right), \right. \quad (33)$$

$$\left. x_{D,C}(k) + \min \left(t_{D,B} + t_{B,C}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{E,C}(k) + \min \left(t_{E,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right)$$

$$x_{E,C}(k+1) = \max \left(x_{A,C}(k) + \min \left(t_{A,E}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{C,E}(k) + \min \left(t_{C,E}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (34)$$

$$x_{C,E}(k+1) = \max \left(x_{A,C}(k) + \min \left(t_{A,C}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{B,C}(k) + \min \left(t_{B,C}, \frac{o_q}{n_q} \right), \right. \quad (35)$$

$$\left. x_{D,C}(k) + \min \left(t_{D,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right)$$

Úpravou systému rovnic (28) - (35) byly sestaveny rovnice (36) - (43) max-plus modelu:

$$x_{A,C}(k+1) = \left(x_{A,C}(k) \otimes \frac{o_q}{n_q} \right) \oplus \left(x_{C,A}(k) \otimes \min \left(t_{C,A}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (36)$$

$$x_{C,A}(k+1) = \left(x_{A,C}(k) \otimes \min \left(t_{A,E} \otimes t_{E,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{B,C}(k) \otimes \min \left(t_{B,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (37)$$

$$\oplus \left(x_{D,C}(k) \otimes \min \left(t_{D,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{E,C}(k) \otimes \min \left(t_{E,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right)$$

$$x_{B,C}(k+1) = \left(x_{C,B}(k) \otimes \min \left(t_{C,B}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{D,C}(k) \otimes \min \left(t_{D,B}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (38)$$

$$x_{C,B}(k+1) = \left(x_{A,C}(k) \otimes \min \left(t_{A,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{D,C}(k) \otimes \min \left(t_{D,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (39)$$

$$\oplus \left(x_{E,C}(k) \otimes \min \left(t_{E,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right)$$

$$x_{D,C}(k+1) = \left(x_{D,C}(k) \otimes \frac{o_q}{n_q} \right) \oplus \left(x_{C,D}(k) \otimes \min \left(t_{C,D}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (40)$$

$$x_{C,D}(k+1) = \left(x_{A,C}(k) \otimes \min \left(t_{A,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{B,C}(k) \otimes \min \left(t_{B,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (41)$$

$$\oplus \left(x_{D,C}(k) \otimes \min \left(t_{D,B} \otimes t_{B,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{E,C}(k) \otimes \min \left(t_{E,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right)$$

$$x_{E,C}(k+1) = \left(x_{A,C}(k) \otimes \min \left(t_{A,E}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{C,E}(k) \otimes \min \left(t_{C,E}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (42)$$

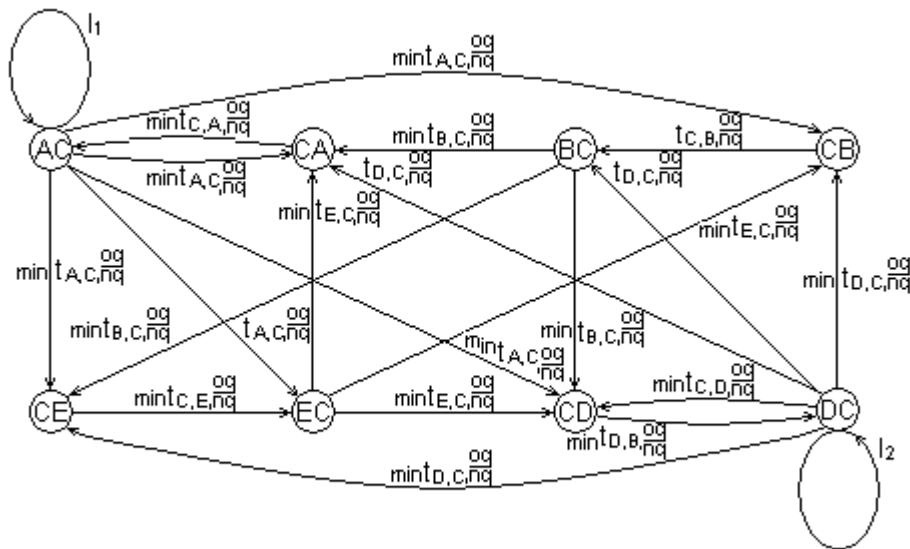
$$x_{C,E}(k+1) = \left(x_{A,C}(k) \otimes \min \left(t_{A,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{B,C}(k) \otimes \min \left(t_{B,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (43)$$

$$\oplus \left(x_{D,C}(k) \otimes \min \left(t_{D,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right)$$

Tak lze odvodit matici systému A (44) pro model synchronizace diametrálních linek pro více vozidel, podle které byl vytvořen komunikační graf (obr. č. 10).

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} (A,C) & (C,A) & (B,C) & (C,B) & (D,C) & (C,D) & (E,C) & (C,E) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (A,C) \\ (C,A) \\ (B,C) \\ (C,B) \\ (D,C) \\ (C,D) \\ (E,C) \\ (C,E) \end{matrix} & \begin{pmatrix} l_1 & t_{C,A} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & t_{B,C} & \varepsilon & t_{D,C} & \varepsilon & t_{E,C} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & t_{C,B} & t_{D,B} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ t_{A,C} & \varepsilon & t_{B,C} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & t_{E,C} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & l_2 & t_{C,D} & \varepsilon & \varepsilon \\ t_{A,C} & \varepsilon & t_{B,C} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & t_{E,C} & \varepsilon \\ t_{A,E} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & t_{C,E} \\ t_{A,C} & \varepsilon & t_{B,C} & \varepsilon & t_{D,C} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (44)$$

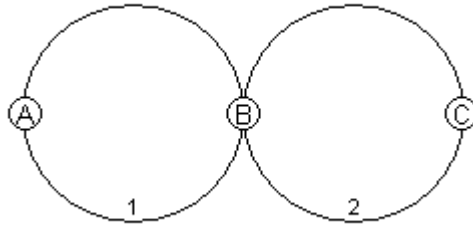
Komunikační graf pro více vozidel (obr. č. 10) má shodnou množinu hran s komunikačním grafem pro 1 vozidlo na lince, liší se pouze ohodnocením hran.



Obr. č. 10: Komunikační graf pro model diametrálních linek při obsluze více vozidly

5.1.3 Model synchronizace pro dvě okružní linky

Analogicky jako v předchozím případě vystupují v modelu synchronizace okružních linek 1 a 2 znázorněných na obr. č. 11 proměnné a parametry uvedené v kapitole 5.1.1. Množina zastávek $Z = \{A, B, C\}$ obsahuje konečné zastávky A, C a přestupní zastávku B.



Obr. č. 11: Schéma dvou okružních linek

Systém rovnic zajišťující přestup mezi linkami 1 a 2 na zastávce B pro jedno vozidlo

$$x_{A,B}(k+1) = \max(x_{A,B}(k) + l_1, x_{B,A}(k) + t_{B,A}) \quad (45)$$

$$x_{B,A}(k+1) = \max(x_{A,B}(k) + t_{A,B}, x_{C,B}(k) + t_{C,B}) \quad (46)$$

$$x_{C,B}(k+1) = \max(x_{B,C}(k) + t_{B,C}, x_{C,B}(k) + l_2) \quad (47)$$

$$x_{B,C}(k+1) = \max(x_{A,B}(k) + t_{A,B}, x_{C,B}(k) + t_{C,B}) \quad (48)$$

Úpravou systému rovnic (45) – (48) byly sestaveny rovnice (49) - (52) max-plus modelu:

$$x_{A,B}(k+1) = (x_{A,B}(k) \otimes l_1) \oplus (x_{B,A}(k) \otimes t_{B,A}) \quad (49)$$

$$x_{B,A}(k+1) = (x_{A,B}(k) \otimes t_{A,B}) \oplus (x_{C,B}(k) \otimes t_{C,B}) \quad (50)$$

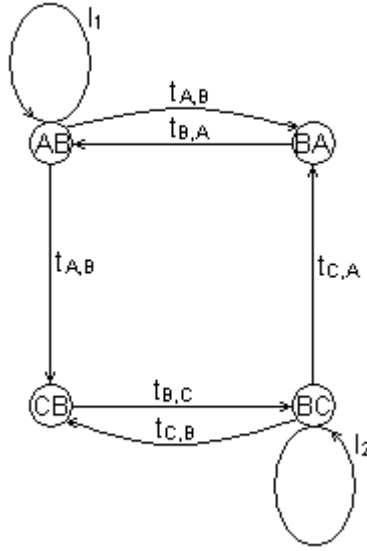
$$x_{C,B}(k+1) = (x_{B,C}(k) \otimes t_{B,C}) \oplus (x_{C,B}(k) \otimes l_2) \quad (51)$$

$$x_{B,C}(k+1) = (x_{A,B}(k) \otimes t_{A,B}) \oplus (x_{C,B}(k) \otimes t_{C,B}) \quad (52)$$

Tak lze odvodit matici systému A (53) pro model synchronizace okružních linek pro jedno vozidlo, podle kterého byl vytvořen komunikační graf (obr. č. 12).

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} (A,B) & (B,A) & (C,B) & (B,C) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (A,B) \\ (B,A) \\ (C,B) \\ (B,C) \end{matrix} & \begin{pmatrix} l_1 & t_{B,A} & \varepsilon & \varepsilon \\ t_{A,B} & \varepsilon & t_{C,B} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & l_2 & t_{B,C} \\ t_{A,B} & \varepsilon & t_{C,B} & \varepsilon \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (53)$$

Na obr. č. 12 je znázorněn komunikační graf, ze kterého je zřejmé, že mezi každou dvojicí různých vrcholů existuje orientovaná cesta a jedná se tedy silně souvislý graf. Pak je matice systému regulární a podle věty 2 platí, že vlastní hodnota matice je určena jednoznačně.



Obr. č. 12: Komunikační graf pro model okružních linek při obsluze jedním vozidlem

Systém rovnic zajišťující přestup mezi linkami 1 a 2 na zastávce B pro více vozidel

Podobně jako v modelu pro více vozidel v předchozí kapitole předpokládám, že pro každou linku k existuje disponibilní počet vozidel n_k a platí $n_1 + n_2 \geq 3$.

$$x_{A,B}(k+1) = \max \left(x_{A,B}(k) + \frac{o_q}{n_q}, x_{B,A}(k) + \min \left(t_{B,A}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (54)$$

$$x_{B,A}(k+1) = \max \left(x_{A,B}(k) + \min \left(t_{A,B}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{C,B}(k) + \min \left(t_{C,B}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (55)$$

$$x_{C,B}(k+1) = \max \left(x_{B,C}(k) + \min \left(t_{B,C}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{C,B}(k) + \frac{o_q}{n_q} \right) \quad (56)$$

$$x_{B,C}(k+1) = \max \left(x_{A,B}(k) + \min \left(t_{A,B}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{C,B}(k) + \min \left(t_{C,B}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (57)$$

Úpravou systému rovnic (221) - (241) byly sestaveny rovnice (242) - (262) max-plus modelu:

$$x_{A,B}(k+1) = \left(x_{A,B}(k) \otimes \frac{o_q}{n_q} \right) \oplus \left(x_{B,A}(k) \otimes \min \left(t_{B,A}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (58)$$

$$x_{B,A}(k+1) = \left(x_{A,B}(k) \otimes \min \left(t_{A,B}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{C,B}(k) \otimes \min \left(t_{C,B}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (59)$$

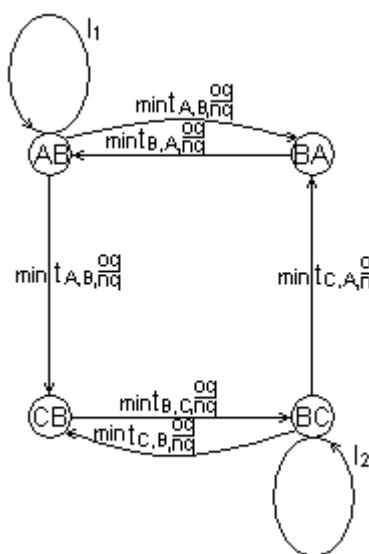
$$x_{C,B}(k+1) = \left(x_{B,C}(k) \otimes \min \left(t_{B,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{C,B}(k) \otimes \frac{o_q}{n_q} \right) \quad (60)$$

$$x_{B,C}(k+1) = \left(x_{A,B}(k) \otimes \min \left(t_{A,B}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{C,B}(k) \otimes \min \left(t_{C,B}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (61)$$

Tak lze odvodit matici systému A (62) pro model synchronizace okružních linek pro jedno vozidlo, podle kterého byl vytvořen komunikační graf (obr. č. 13).

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} (A,B) & (B,A) & (C,B) & (B,C) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (A,B) \\ (B,A) \\ (C,B) \\ (B,C) \end{matrix} & \begin{pmatrix} l_1 & t_{B,A} & \varepsilon & \varepsilon \\ t_{A,B} & \varepsilon & t_{C,B} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & l_2 & t_{B,C} \\ t_{A,B} & \varepsilon & t_{C,B} & \varepsilon \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (62)$$

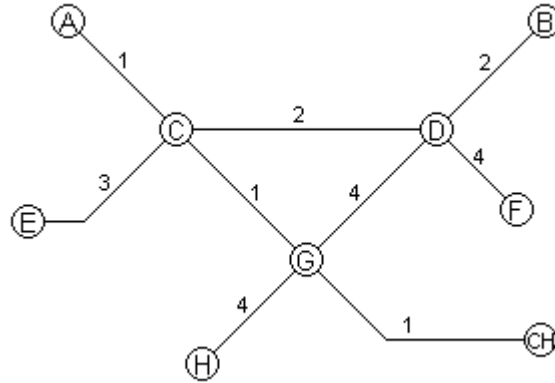
Stejně jako u modelu diametrálních linek má komunikační graf pro více vozidel shodnou množinu hran s komunikačním grafem pro 1 vozidlo na lince, liší se pouze ohodnocením hran.



Obr. č. 13: Komunikační graf pro model okružních linek při obsluze více vozidly

5.1.4 Model synchronizace více linek v síti

Podobně jako v předchozích příkladech vystupují v modelu synchronizace více linek znázorněných na obr. č. 14 proměnné a parametry uvedené v kapitole 5.1.1. Množina zastávek $Z=\{A, B, \dots, CH\}$ pro daný příklad obsahuje konečné zastávky A, B, C, E, F, H, CH a přestupní zastávky C, D, G.



Obr. č. 14: Schéma více linek v síti

Systém rovnic zajišťující přestup mezi více linkami pro jedno vozidlo

$$x_{A,C}(k+1) = \max(x_{A,C}(k) + l_1, x_{C,A}(k) + t_{C,A}) \quad (63)$$

$$x_{C,A}(k+1) = \max(x_{A,C}(k) + t_{A,CH} + t_{CH,C}, x_{E,C}(k) + t_{E,C}, x_{D,C}(k) + t_{D,C}, x_{G,C}(k) + t_{G,C}) \quad (64)$$

$$x_{B,D}(k+1) = \max(x_{B,D}(k) + l_2, x_{D,B}(k) + t_{D,B}) \quad (65)$$

$$x_{D,B}(k+1) = \max(x_{B,D}(k) + t_{B,C} + t_{C,D}, x_{C,D}(k) + t_{C,D}, x_{G,D}(k) + t_{G,D}) \quad (66)$$

$$x_{C,E}(k+1) = \max(x_{E,C}(k) + t_{E,C}, x_{D,C}(k) + t_{D,C}, x_{G,C}(k) + t_{G,C}) \quad (67)$$

$$x_{E,C}(k+1) = \max(x_{C,E}(k) + t_{C,E}, x_{E,C}(k) + l_3) \quad (68)$$

$$x_{C,D}(k+1) = \max(x_{A,C}(k) + t_{A,C}, x_{B,D}(k) + t_{B,C}, x_{E,C}(k) + t_{E,C}) \quad (69)$$

$$x_{D,C}(k+1) = \max(x_{B,D}(k) + t_{B,D}, x_{F,D}(k) + t_{F,D}) \quad (70)$$

$$x_{C,G}(k+1) = \max(x_{A,C}(k) + t_{A,C}, x_{E,C}(k) + t_{E,C}, x_{D,C}(k) + t_{D,C}) \quad (71)$$

$$x_{G,C}(k+1) = \max(x_{A,C}(k) + t_{A,CH} + t_{CH,G}, x_{H,G}(k) + t_{H,G}, x_{CH,G}(k) + t_{CH,G}) \quad (72)$$

$$x_{D,F}(k+1) = \max(x_{C,D}(k) + t_{C,D}, x_{F,D}(k) + t_{F,H} + t_{H,D}, x_{G,D}(k) + t_{G,D}) \quad (73)$$

$$x_{F,D}(k+1) = \max(x_{D,F}(k) + t_{D,F}, x_{F,D}(k) + l_4) \quad (74)$$

$$x_{D,G}(k+1) = \max(x_{B,D}(k) + t_{B,D}, x_{F,D}(k) + t_{F,D}) \quad (75)$$

$$x_{G,D}(k+1) = \max(x_{F,D}(k) + t_{F,H} + t_{H,G}, x_{H,G}(k) + t_{H,G}, x_{CH,G}(k) + t_{CH,G}) \quad (76)$$

$$x_{G,H}(k+1) = \max(x_{C,G}(k) + t_{C,G}, x_{F,D}(k) + t_{F,D}, x_{D,G}(k) + t_{D,G}) \quad (77)$$

$$x_{H,G}(k+1) = \max(x_{F,D}(k) + t_{F,D}, x_{G,H}(k) + t_{G,H}) \quad (78)$$

$$x_{G,CH}(k+1) = \max(x_{A,C}(k) + t_{A,G}, x_{C,G}(k) + t_{C,G}, x_{D,G}(k) + t_{D,G}) \quad (79)$$

$$x_{CH,G}(k+1) = \max(x_{A,C}(k) + t_{A,CH}, x_{G,CH}(k) + t_{G,CH}) \quad (80)$$

Úpravou systému rovnic (63) - (80) byly sestaveny rovnice (81) - (98) max-plus modelu:

$$x_{A,C}(k+1) = \max(x_{A,C}(k) \otimes l_1, x_{C,A}(k) \otimes t_{C,A}) \quad (81)$$

$$x_{C,A}(k+1) = \max(x_{A,C}(k) \otimes t_{A,CH} \otimes t_{CH,C}, x_{E,C}(k) \otimes t_{E,C}, x_{D,C} \otimes t_{D,C}, x_{G,C}(k) \otimes t_{G,C}) \quad (82)$$

$$x_{B,D}(k+1) = \max(x_{B,D}(k) \otimes l_2, x_{D,B}(k) \otimes t_{D,B}) \quad (83)$$

$$x_{D,B}(k+1) = \max(x_{B,D}(k) \otimes t_{B,C} \otimes t_{C,D}, x_{C,D}(k) \otimes t_{C,D}, x_{G,D}(k) \otimes t_{G,D}) \quad (84)$$

$$x_{C,E}(k+1) = \max(x_{E,C}(k) \otimes t_{E,C}, x_{D,C}(k) \otimes t_{D,C}, x_{G,C}(k) \otimes t_{G,C}) \quad (85)$$

$$x_{E,C}(k+1) = \max(x_{C,E}(k) \otimes t_{C,E}, x_{E,C}(k) \otimes l_3) \quad (86)$$

$$x_{C,D}(k+1) = \max(x_{A,C}(k) \otimes t_{A,C}, x_{B,D}(k) \otimes t_{B,C}, x_{E,C}(k) \otimes t_{E,C}) \quad (87)$$

$$x_{D,C}(k+1) = \max(x_{B,D}(k) \otimes t_{B,D}, x_{F,D}(k) \otimes t_{F,D}) \quad (88)$$

$$x_{C,G}(k+1) = \max(x_{A,C}(k) \otimes t_{A,C}, x_{E,C}(k) \otimes t_{E,C}, x_{D,C}(k) \otimes t_{D,C}) \quad (89)$$

$$x_{G,C}(k+1) = \max(x_{A,C}(k) \otimes t_{A,CH} \otimes t_{CH,G}, x_{H,G}(k) \otimes t_{H,G}, x_{CH,G}(k) \otimes t_{CH,G}) \quad (90)$$

$$x_{D,F}(k+1) = \max(x_{C,D}(k) \otimes t_{C,D}, x_{F,D}(k) \otimes t_{F,H} \otimes t_{H,D}, x_{G,D}(k) \otimes t_{G,D}) \quad (91)$$

$$x_{F,D}(k+1) = \max(x_{D,F}(k) \otimes t_{D,F}, x_{F,D}(k) \otimes l_4) \quad (92)$$

$$x_{D,G}(k+1) = \max(x_{B,D}(k) \otimes t_{B,D}, x_{F,D}(k) \otimes t_{F,D}) \quad (93)$$

$$x_{G,D}(k+1) = \max(x_{F,D}(k) \oplus t_{F,H} \otimes t_{H,G}, x_{H,G}(k) \otimes t_{H,G}, x_{CH,G}(k) \otimes t_{CH,G}) \quad (94)$$

$$x_{G,H}(k+1) = \max(x_{C,G}(k) \otimes t_{C,G}, x_{F,D}(k) \otimes t_{F,D}, x_{D,G}(k) \otimes t_{D,G}) \quad (95)$$

$$x_{H,G}(k+1) = \max(x_{F,D}(k) \otimes t_{F,D}, x_{G,H}(k) \otimes t_{G,H}) \quad (96)$$

$$x_{G,CH}(k+1) = \max(x_{A,C}(k) \otimes t_{A,G}, x_{C,G}(k) \otimes t_{C,G}, x_{D,G}(k) \otimes t_{D,G}) \quad (97)$$

$$x_{CH,G}(k+1) = \max(x_{A,C}(k) \otimes t_{A,CH}, x_{G,CH}(k) \otimes t_{G,CH}) \quad (98)$$

Systém rovnic zajišťující přestup mezi více linkami pro více vozidel

V modelu pro více vozidel opět předpokládám, že pro linky 1, 2, 3, 4 existuje disponibilní počet vozidel n_1, n_2, n_3, n_4 a platí $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \geq 5$.

$$x_{A,C}(k+1) = \max \left(x_{A,C}(k) + \frac{o_q}{n_q}, x_{C,A}(k) + \min \left(t_{C,A}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (99)$$

$$x_{C,A}(k+1) = \max \left(x_{A,C}(k) + \min \left(t_{A,CH} + t_{CH,C}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{E,C}(k) + \min \left(t_{E,C}, \frac{o_q}{n_q} \right), \right. \quad (100)$$

$$\left. x_{D,C}(k) + \min \left(t_{D,C}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{G,C}(k) + \min \left(t_{G,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right)$$

$$x_{B,D}(k+1) = \max \left(x_{B,D}(k) + \frac{o_q}{n_q}, x_{D,B}(k) + \min \left(t_{D,B}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (101)$$

$$x_{D,B}(k+1) = \max \left(x_{B,D}(k) + \min \left(t_{B,C} + t_{C,D}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{C,D}(k) + \min \left(t_{C,D}, \frac{o_q}{n_q} \right), \right. \quad (102)$$

$$\left. x_{G,D}(k) + \min \left(t_{G,D}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right)$$

$$x_{C,E}(k+1) = \max \left(x_{E,C}(k) + \min \left(t_{E,C}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{D,C}(k) + \min \left(t_{D,C}, \frac{o_q}{n_q} \right), \right. \quad (103)$$

$$\left. x_{G,C}(k) + \min \left(t_{G,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right)$$

$$x_{E,C}(k+1) = \max \left(x_{C,E}(k) + \min \left(t_{C,E}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{E,C}(k) + \frac{o_q}{n_q} \right) \quad (104)$$

$$x_{C,D}(k+1) = \max \left(x_{A,C}(k) + \min \left(t_{A,C}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{B,D}(k) + \min \left(t_{B,C}, \frac{o_q}{n_q} \right), \right. \quad (105)$$

$$\left. x_{E,C}(k) + \min \left(t_{E,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right)$$

$$x_{D,C}(k+1) = \max \left(x_{B,D}(k) + \min \left(t_{B,D}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{F,D}(k) + \min \left(t_{F,D}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (106)$$

$$x_{C,G}(k+1) = \max \left(x_{A,C}(k) + \min \left(t_{A,C}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{E,C}(k) + \min \left(t_{E,C}, \frac{o_q}{n_q} \right), \right. \quad (107)$$

$$\left. x_{D,C}(k) + \min \left(t_{D,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right)$$

$$x_{G,C}(k+1) = \max \left(x_{A,C}(k) + \min \left(t_{A,CH} + t_{CH,G}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{H,G}(k) + \min \left(t_{H,G}, \frac{o_q}{n_q} \right), \right. \quad (108)$$

$$\left. x_{CH,G}(k) + \min \left(t_{CH,G}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right)$$

$$x_{D,F}(k+1) = \max \left(x_{C,D}(k) + \min \left(t_{C,D}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{F,D}(k) + \min \left(t_{F,H} + t_{H,D}, \frac{o_q}{n_q} \right), \right. \quad (109)$$

$$\left. x_{G,D}(k) + \min \left(t_{G,D}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right)$$

$$x_{F,D}(k+1) = \max \left(x_{D,F}(k) + \min \left(t_{D,F}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{F,D}(k) + \frac{o_q}{n_q} \right) \quad (110)$$

$$x_{D,G}(k+1) = \max \left(x_{B,D}(k) + \min \left(t_{B,D}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{F,D}(k) + \min \left(t_{F,D}, \frac{o_q}{n_q} \right), \right. \quad (111)$$

$$\left. x_{D,G}(k) + \min \left(t_{B,D}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{F,D}(k) + \min \left(t_{F,D}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (112)$$

$$x_{G,D}(k+1) = \max \left(x_{F,D}(k) + \min \left(t_{F,H} + t_{H,G}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{H,G}(k) + \min \left(t_{H,G}, \frac{o_q}{n_q} \right), \right. \quad (113)$$

$$\left. x_{CH,G}(k) + \min \left(t_{CH,G}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right)$$

$$x_{G,H}(k+1) = \max \left(x_{C,G}(k) + \min \left(t_{C,G}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{F,D}(k) + \min \left(t_{F,D}, \frac{o_q}{n_q} \right), \right. \quad (114)$$

$$\left. x_{D,G}(k) + \min \left(t_{D,G}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right)$$

$$x_{H,G}(k+1) = \max \left(x_{F,D}(k) + \min \left(t_{F,D}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{G,H}(k) + \min \left(t_{G,H}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (115)$$

$$x_{G,CH}(k+1) = \max \left(x_{A,C}(k) + \min \left(t_{A,G}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{C,G}(k) + \min \left(t_{C,G}, \frac{o_q}{n_q} \right), \right. \quad (116)$$

$$\left. x_{D,G}(k) + \min \left(t_{D,G}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right)$$

$$x_{CH,G}(k+1) = \max \left(x_{A,C}(k) + \min \left(t_{A,CH}, \frac{o_q}{n_q} \right), x_{G,CH}(k) + \min \left(t_{G,CH}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (117)$$

Úpravou systému rovnic (99) - (117) byly sestaveny rovnice (118) - (136) max-plus modelu:

$$x_{A,C}(k+1) = \left(x_{A,C}(k) \otimes \frac{o_q}{n_q} \right) \oplus \left(x_{C,A}(k) \otimes \min \left(t_{C,A}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (118)$$

$$x_{C,A}(k+1) = \left(x_{A,C}(k) \otimes \min \left(t_{A,CH} \otimes t_{CH,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{E,C}(k) \otimes \min \left(t_{E,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (119)$$

$$\oplus \left(x_{D,C}(k) \otimes \min \left(t_{D,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{G,C}(k) \otimes \min \left(t_{G,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right)$$

$$x_{B,D}(k+1) = \left(x_{B,D}(k) \otimes \frac{o_q}{n_q} \right) \oplus \left(x_{D,B}(k) \otimes \min \left(t_{D,B}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (120)$$

$$x_{D,B}(k+1) = \left(x_{B,D}(k) \otimes \min \left(t_{B,C} \otimes t_{C,D}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{C,D}(k) \otimes \min \left(t_{C,D}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (121)$$

$$\oplus \left(x_{C,D}(k) \otimes \min \left(t_{C,D}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{G,D}(k) \otimes \min \left(t_{G,D}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right)$$

$$x_{C,E}(k+1) = \left(x_{E,C}(k) \otimes \min \left(t_{E,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{D,C}(k) \otimes \min \left(t_{D,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (122)$$

$$\oplus \left(x_{G,C}(k) \otimes \min \left(t_{G,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right)$$

$$x_{E,C}(k+1) = \left(x_{C,E}(k) \otimes \min \left(t_{C,E}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{E,C}(k) \otimes \frac{o_q}{n_q} \right) \quad (123)$$

$$x_{C,D}(k+1) = \left(x_{A,C}(k) \otimes \min \left(t_{A,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{B,D}(k) \otimes \min \left(t_{B,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{E,C}(k) \otimes \min \left(t_{E,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (124)$$

$$x_{D,C}(k+1) = \left(x_{B,D}(k) \otimes \min \left(t_{B,D}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{F,D}(k) \otimes \min \left(t_{F,D}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (125)$$

$$x_{C,G}(k+1) = \left(x_{A,C}(k) \otimes \min \left(t_{A,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{E,C}(k) \otimes \min \left(t_{E,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{D,C}(k) \otimes \min \left(t_{D,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (126)$$

$$x_{C,G}(k+1) = \left(x_{A,C}(k) \otimes \min \left(t_{A,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{E,C}(k) \otimes \min \left(t_{E,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{D,C}(k) \otimes \min \left(t_{D,C}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (127)$$

$$x_{G,C}(k+1) = \left(x_{A,C}(k) \otimes \min \left(t_{A,CH} \otimes t_{CH,G}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{H,G}(k) \otimes \min \left(t_{H,G}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{CH,G}(k) \otimes \min \left(t_{CH,G}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (128)$$

$$x_{D,F}(k+1) = \left(x_{C,D}(k) \otimes \min \left(t_{C,D}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{F,D}(k) \otimes \min \left(t_{F,H} \otimes t_{H,D}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{G,D}(k) \otimes \min \left(t_{G,D}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (129)$$

$$x_{F,D}(k+1) = \left(x_{D,F}(k) \otimes \min \left(t_{D,F}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{F,D}(k) \otimes \frac{o_q}{n_q} \right) \quad (130)$$

$$x_{D,G}(k+1) = \left(x_{B,D}(k) \otimes \min \left(t_{B,D}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{F,D}(k) \otimes \min \left(t_{F,D}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (131)$$

$$x_{G,D}(k+1) = \left(x_{F,D}(k) \otimes \min \left(t_{F,H} \otimes t_{H,G}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{H,G}(k) \otimes \min \left(t_{H,G}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (132)$$

$$\oplus \left(x_{CH,G}(k) \otimes \min \left(t_{CH,G}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right)$$

$$x_{G,H}(k+1) = \left(x_{C,G}(k) \otimes \min \left(t_{C,G}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{F,D}(k) \otimes \min \left(t_{F,D}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (133)$$

$$\oplus \left(x_{D,G}(k) \otimes \min \left(t_{D,G}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right)$$

$$x_{H,G}(k+1) = \left(x_{F,D}(k) \otimes \min \left(t_{F,D}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{G,H}(k) \otimes \min \left(t_{G,H}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (134)$$

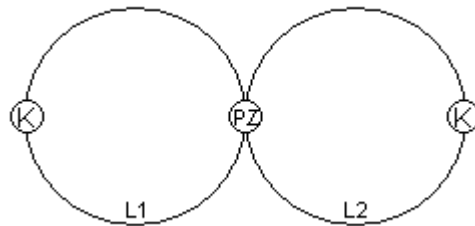
$$x_{G,CH}(k+1) = \left(x_{A,C}(k) \otimes \min \left(t_{A,G}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{C,G}(k) \otimes \min \left(t_{C,G}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (135)$$

$$\oplus \left(x_{D,G}(k) \otimes \min \left(t_{D,G}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right)$$

$$x_{CH,G}(k+1) = \left(x_{A,C}(k) \otimes \min \left(t_{A,CH}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \oplus \left(x_{G,CH}(k) \otimes \min \left(t_{G,CH}, \frac{o_q}{n_q} \right) \right) \quad (136)$$

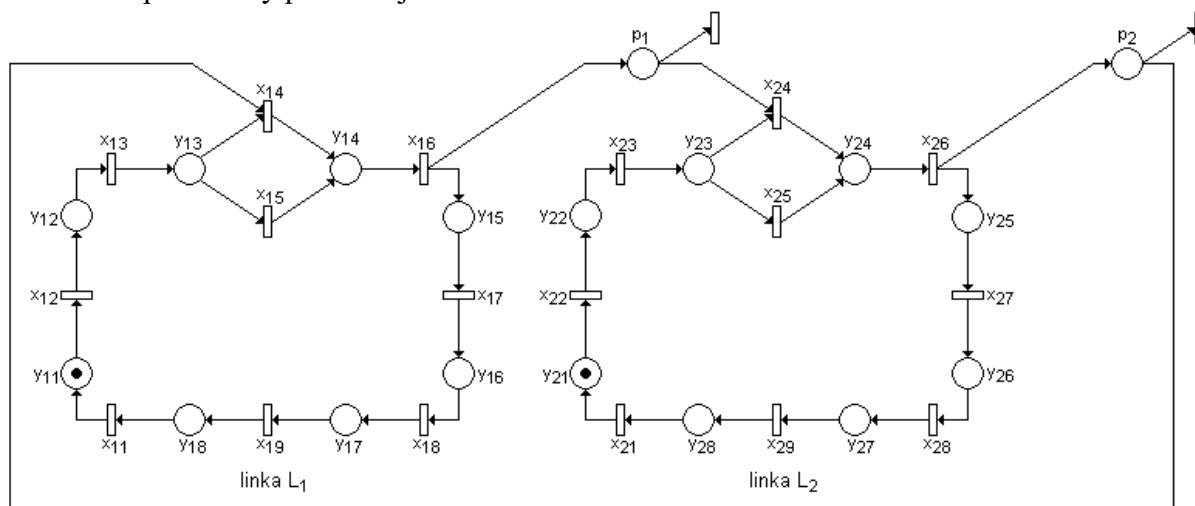
5.2 Synchronizace dvou okružních linek v Petriho síti

Jedním z možných způsobů řešení uvedeného problému je graficky založený model, kdy přechody v P/T Petriho síti představují zastávky, místa jízdy vozidla mezi zastávkami a vozidla jsou reprezentována tokeny. Úvodní experimenty s modelováním provozu systému MHD Petriho sítěmi byly prováděny v modelové síti MHD s okružním systémem tras linek s jedním společným přestupním uzlem (viz. obr. č. 15) [18], [19].



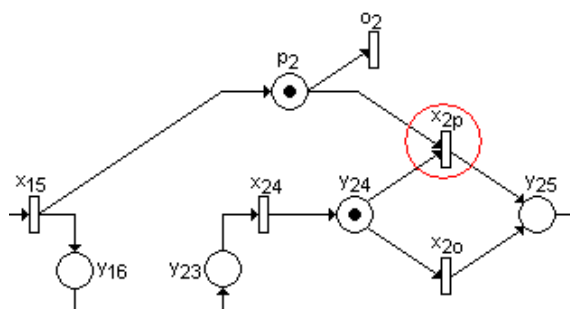
Obr. č. 15: Modelová dopravní síť MHD

Petriho síť pro řešený problém je uvedena na obr. č. 16



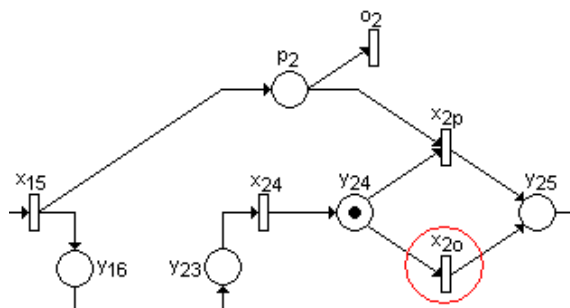
Obr. č. 16: Grafické znázornění Petriho sítě pro řešený problém

Přestupy cestujících modelují v navržené Petriho síti specifické komponenty (viz. obr. č. 17). V případě, že cestující budou požadovat přestoupit, bude tento požadavek znázorněn setrváním tokenu ve vstupním místě p_i a dojde k aktivaci přechodu s vyšší prioritou x_{ip} .



Obr. č. 17: Fragment modelu Petriho sítě znázorňující požadavek přestup

Jestliže cestující nebudou potřebovat přestoupit, bude aktivován přechod o_i , v místě p_i se nebude vyskytovat token reprezentující skupinu přestupujících cestujících a dojde k aktivaci přechodu x_{io} . Tato situace je znázorněna na fragmentu dopravní sítě MHD na obr. č. 18.



Obr. č. 18: Fragment modelu Petriho sítě bez požadavku na přestup

Postup při potřebě využití Petriho sítí je následující:

V první řadě je třeba sestavit podle zvolené koncepce Petriho sítí model v Petriho síti. Každá Petriho síť se skládá z posloupnosti přechodů a míst spojených orientovanými hranami. Prostřednictvím orientovaných hran se znázorní logické vazby mezi objekty, které jsou vzájemně ovlivněny. K tomu, aby bylo možno modelovat pohyb vozidel, je nutné před začátkem simulace do některého místa na každé lince umístit token představující vozidlo.

Pro potřeby modelování problému nástroji Petriho sítí se bude každá linka L_i skládat z posloupnosti přechodů ($x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ij}$) a míst, která jsou spojena hranami, jak je uvedeno na obr. 16. Jednotlivé přechody reprezentují zastávky, přechod x_{i1} je výchozí zastávkou, x_{i5} představuje přestupní zastávku. Přechody x_{ip} a x_{io} představují propojení přestupních zastávek. Místa y_{ij} mezi těmito přechody představují pohyb vozidel mezi zastávkami. Místa označená p_i spojují linky L_i a L_{i+1} . Jejich prostřednictvím je možné modelovat pohyb cestujících, kteří chtějí přestoupit mezi dvěma spoji dvou linek.

Tokens v Petriho síti budou mít dva významy. Jednak budou modelovat pohybující se vozidlo a potom také skupiny cestujících, kteří budou v přestupním uzlu přestupovat. V případě místa p_i představuje token všechny cestující čekající na přestupní zastávce. Token reprezentující cestující, kteří potřebují přestoupit vznikne rozdělením tokenu představujícího vozidlo, který vstoupí do přechodu x_{i5} – přestupní zastávky ze kterého vycházejí dvě orientované hrany. V modelu dopravní sítě MHD se mohou vyskytovat různé varianty, buď je aktivován přechod x_{ip} reprezentující přestup cestujícího na spoj jiné linky nebo je aktivován přechod x_{io} , který představuje že cestující nepřestupuje na spoj druhé linky.

Vzhledem k tomu, že v Petriho síti přechody x_{ip} a x_{io} představují propojení přestupních zastávek a nerepresentují zastávky bude počet přechodů na jednotlivých linkách v modelu dopravní sítě MHD o 2 přechody vyšší než je počet zastávek na jednotlivých linkách.

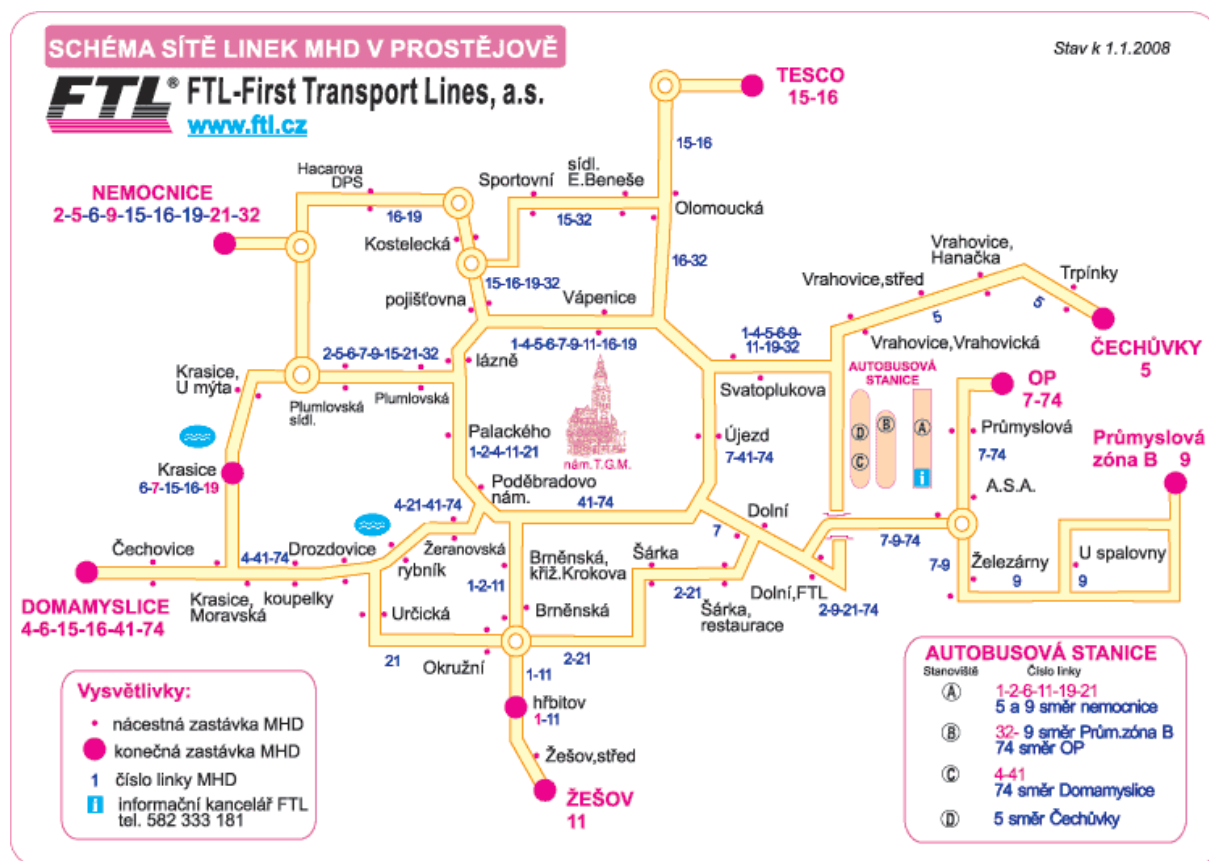
K modelování Petriho sítí se obecně využívá specializovaných software, např. Snoopy, Pipe2. Provedení simulace umožňuje vizualizovat celý proces a pozorovat tak průběh provozu podle navrženého modelu a výskyt případných konfliktů, které je možno následně řešit, např. změnou konfigurace modelu.

6 VYHODNOCENÍ EXPERIMENTŮ NA REÁLNÝCH DATECH

V další části práce bude pozornost věnována modelování jízdních řádů autobusových linek v dopravní síti MHD Prostějov, resp. stanovení časů odjezdů spojů vybraných linek.

6.1 Charakteristika MHD Prostějov

Městskou hromadnou dopravu ve městě Prostějov zajišťuje dopravce FTL - First Transport Lines a.s., který zaujímá významné místo ve vnitrozemské a zahraniční dopravě. Území města je obsluhováno prostřednictvím 15 linek a jedné linky komerční, na které neplatí tarif MHD. Schéma sítě linek MHD Prostějov je znázorněno na obr. č. 19.



Obr. č. 19: Schéma sítě linek MHD v Prostějově

Ze schématu uvedeném na obr. č. 19 je patrné, že systém tras linek MHD je radiálně - okružní. Vnitřní okruh je situován ve vnější hranici historického jádra města, radiálně z něj vycházejí další trasy.

Většina linek začíná, končí nebo projíždí autobusovou stanicí kromě linek 7, 15, 16. V jejím bezprostředním okolí se nachází železniční stanice Prostějov hlavní nádraží, čímž je zajištěna poměrně časově nenáročná možnost přestupu cestujících mezi městskou hromadnou, autobusovou a železniční dopravou na jednom místě. Z hlediska počtu vypravených spojů je nejvíce spojů na linkách č. 2, 4, 5. Schéma autobusové stanice Prostějov je znázorněno na obr. č. 20. Plocha stanovišť MHD je vyznačena zeleně.



Městskou hromadnou dopravu ve městě Prostějov zajišťuje 22 autobusů. Vozidlový park tvoří standardní autobusy Karosa a Sor s pohonem na zemní plyn. Průměrné stáří vozidlového parku činí cca 8 let. Autobusy obsluhují spoje linek MHD podle předem stanovených turnusů. V jednotlivých turnusech jsou pro každé vozidlo definovány činnosti

(přistavení, spoje, bezpečnostní přestávky, odstavení), zastávky, časové údaje, rychlost, ujetá vzdálenost atd. Autobusy v současné době nejsou přiřazeny určité lince, ale v průběhu dne obsluhují spoje různých linek, které na sebe navazují v konečných zastávkách. Některá vozidla navíc obsluhují dle rozpisu také spoje příměstských linek. Počet nasazených autobusů ve špičce činí 19, množství autobusů v sedle je 7. Intervaly na jednotlivých linkách jsou kromě komerční linky nepravidelné, ostatně jak je ve většině našich okresních měst obvyklé.

6.2 Definování problému

Současný stav MHD v Prostějově je charakteristický dvěma základními nedostatky. Prvním zásadním nedostatkem je velký počet linek, který je nepřiměřený většímu okresnímu městu, což přispívá k nepřehlednosti, zejména pro cestujícího, který MHD v Prostějově nevyužívá pravidelně. Druhým zásadním nedostatkem jsou nepravidelné intervaly mezi spoji jednotlivých linek, které zhoršují orientaci cestujících o odjezdech (příjezdech) spojů.

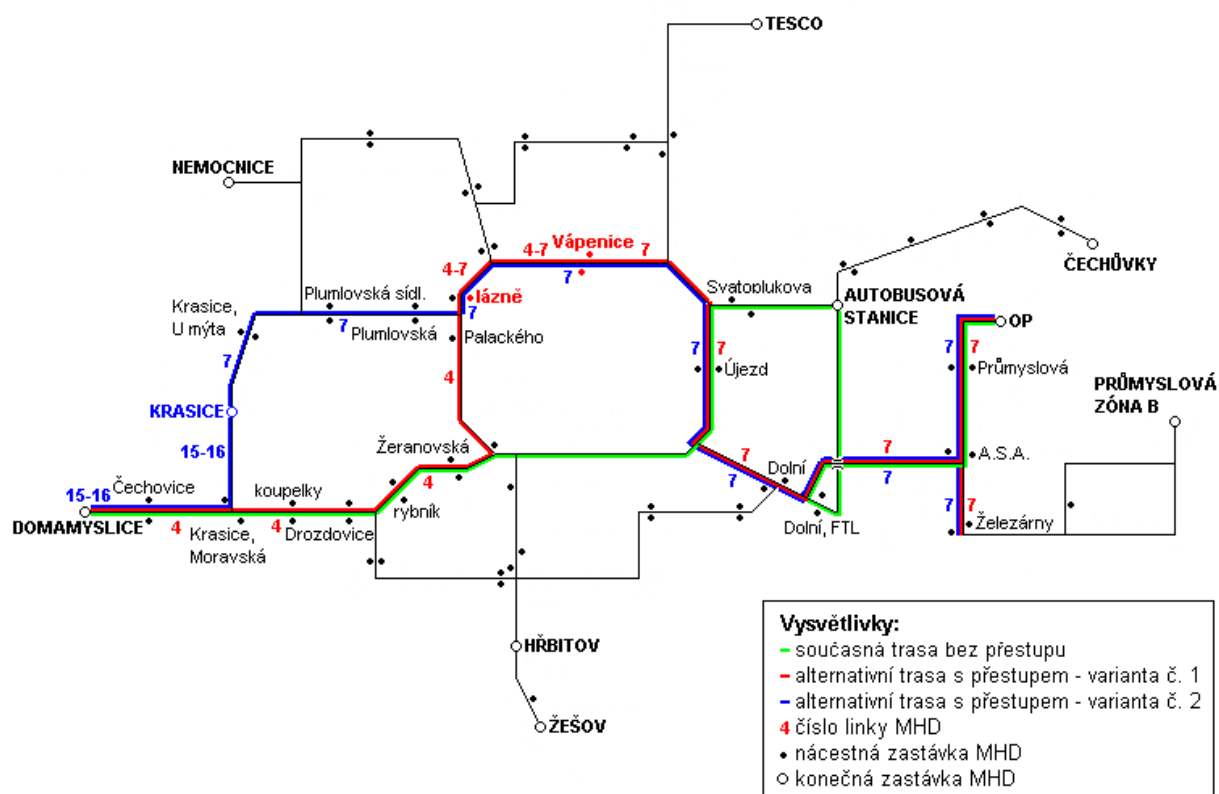
V důsledku racionalizace by došlo ke snížení počtu autobusů a také linek. Výsledek diplomové práce [20] činí 15 autobusů obsluhujících 10 linek a potvrzuje potřebu eliminace počtu linek a vozidel formulovanou ve studii [17]. Uvedené řešení představuje efektivní využití autobusů. Snížení počtu linek přispívá ke zpřehlednění sítě MHD Prostějov a eliminaci souběhů linek. V navrženém řešení neobsluhují autobusy během dne spoje různých linek, ale každý autobus je přidělen jedné lince. Pevné přidělení vozidel umožňuje zpravidlení provozu na jednotlivých linkách, včetně navazujících výhod – vytvoření lepších podmínek pro koordinaci spojů jednotlivých linek.

Pro obyvatele Krasic, severní části města a části průmyslové zóny představuje předkládané řešení zhoršení dostupnosti autobusové stanice a železniční stanice Prostějov hlavní nádraží v podobě absence přímého spojení. Ve výše uvedených relacích budou cestující nuceni více přestupovat, ve všech případech však půjde pouze o 1 přestup. V současné době je největší přestup realizován obousměrně mezi MHD, PAD a železniční dopravou a nejméně přestupů je realizováno v relaci mezi spoji MHD. Realizací navržených změn však vznikne vyšší potřeba přestupovat. V takovém případě bude nutné zabývat se koordinací spojů na jednotlivých linkách na vytipovaných zastávkách, které se budou věnovat v následujících kapitolách.

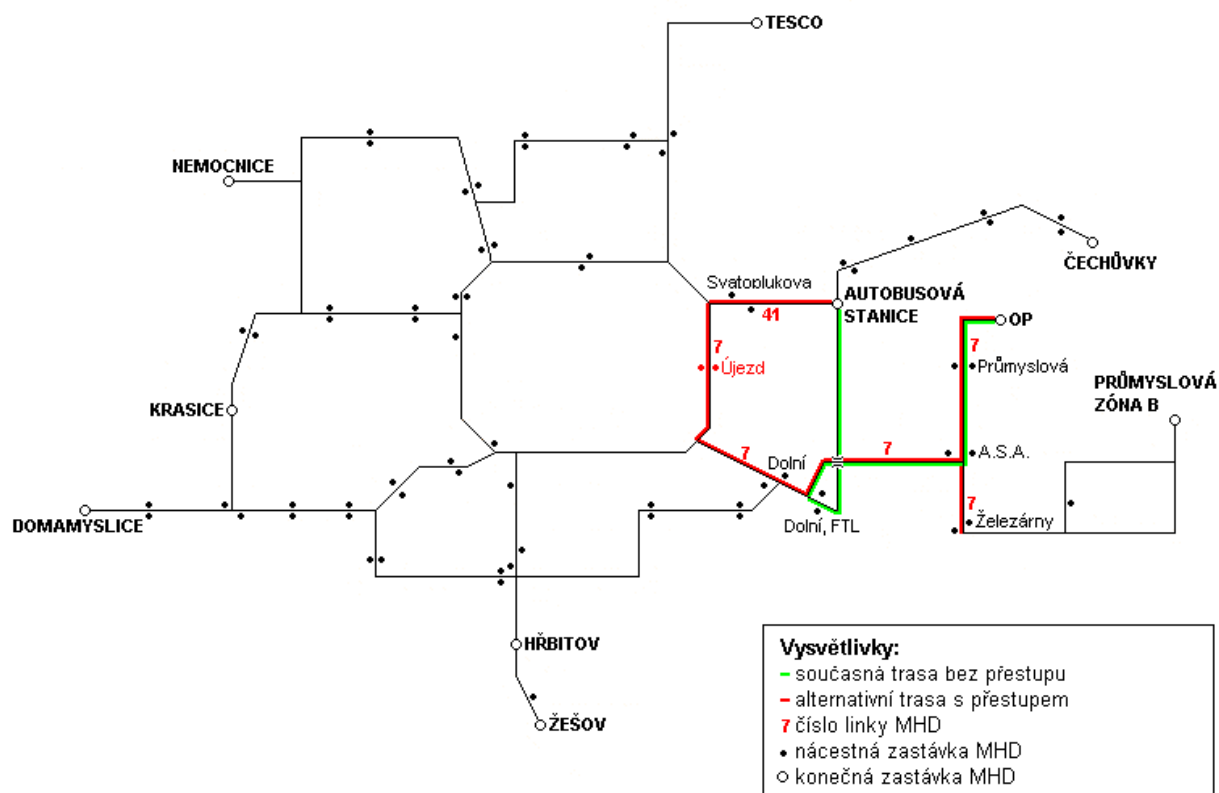
6.3 Synchronizace vybraných linek MHD Prostějov

Výsledek metody PRIVOL činí 15 autobusů obsluhujících 10 linek a to linek č. 2, 4, 5, 7, 9, 11, 15, 16, 21, 41. Zbývající linky č. 1, 6, 19, 32, 74 byly zrušeny. V případě linky č. 1 se její zrušení dalo očekávat, jedná se totiž o linku jejíž trasa kopíruje trasu linky č. 11. Navíc tato linka není v řešeném období provozována ani v současném stavu. Linky č. 6, 19, 32, 74 byly zřejmě zrušeny vzhledem k malým intenzitám přepravního proudu v daných relacích. Dále jejich trasa částečně kopíruje trasu jiné linky, ovšem k souběhu linek dochází vzhledem k charakteru systému tras ve více případech. V předložené práci bude pozornost věnována synchronizaci linek zajišťujících alternativní spojení za zrušené linky č. 32 a 74.

Odstranění linky č. 32 má za následek neexistenci přímého spojení mezi zastávkami TESCO, sídl. E. Beneše, Sportovní a zastávkami Svatoplukova, autobusová stanice. Bude – li cestující potřebovat cestovat v daných relacích, bude muset využít linky č. 15, přestoupit na zastávce Lázně na opačný směr a odtud pokračovat některou z linek č. 4, 5, 9, 11 směr autobusová stanice. V opačném směru bude cestující postupovat stejně. Vzhledem k tomu, že cestující bude nucen při přestupu na zastávce Lázně přejít vozovku, je výhodou že se zde nachází přechod pro chodce řízený SSZ. Zastávka Lázně je v obou směrech vybavena přístřeškem a ve směru od autobusové stanice je opatřena dělícím ostrůvkem. Další variantou pro obyvatele z okolí sídliště E. Beneše je cestovat ze zastávky Olomoucká linkou č. 16 na zastávku Vápenice, přestoupit na opačný směr a pokračovat některou z linek č. 4, 5, 9, 11 směr autobusová stanice. Pro opačný směr platí stejný postup. Uvedené trasy jsou znázorněny na obr. č. 21. Určitou nevýhodu může představovat odsazení zastávky Vápenice pro jednotlivé směry a umístění přechodu pro chodce. Vzhledem ke skutečnosti, že linky č. 4, 5, 9 patří k více nejvíce vytíženým bude synchronizace provedena mezi spoji linek č. 15 a 11 na zastávce Lázně.



Obr. č. 22: Schéma s vyznačením alternativních tras v relaci Domamyslice – OP



Obr. č. 23: Schéma s vyznačením alternativních tras v relaci autobusová stanice – OP

V předložené práci jsou řešeny 3 experimenty:

- experiment č. 1 – zajištění přestupu mezi linkami 11 a 15 na zastávce Lázně
- experiment č. 2 – zajištění přestupu mezi linkami 9 a 16 na zastávce Vápenice
- experiment č. 3 – zajištění přestupu mezi linkami 7 a 41 na zastávce Újezd

Při sestavě rovnic je třeba zvolit na každé z linek výchozí zastávku ke které bude vztažen pohyb vozidla. Jednotlivé experimenty jsou rozšířeny o další varianty, které se od sebe liší výchozími zastávkami. Ve všech experimentech je uvažován případ, kdy je každé lince přiřazeno jedno vozidlo, což odpovídá současnému stavu resp. intervalu na těchto linkách.

6.4 Experiment č. 1

Při modelování synchronizace linek v reálných experimentech jsou použity proměnné a parametry popsané již v kapitole 5.1.1. Za účelem poskytnutí souhrnného přehledu jsou pouze pro první reálný experiment opětovně uvedeny.

Parametry:

- Z - množina zastávek,
- n - počet relací,
- a_i - výchozí zastávka v i -té relaci,
- b_i - cílová zastávka v i -té relaci,
- (a_i, b_i) - i -tá relace,
- t_i - jízdní doba v i -té relaci,
- R - množina relací, $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)\}$,
- I_q - interval na q -té lince.

Proměnné:

- $x_i(k)$ - k -tý synchronizovaný odjezd v i -té relaci,
- λ - délka maximálního průměrného cyklu mezi odjezdy z jedné resp. více zastávek.

Uvedené parametry a proměnné zůstávají shodné pro všechny tři experimenty. V úvodu jednotlivých modelů budou popsány odlišnosti vstupních údajů jednotlivých modelů. Potřebné technologické časy byly čerpány z informací dopravce FTL a.s.

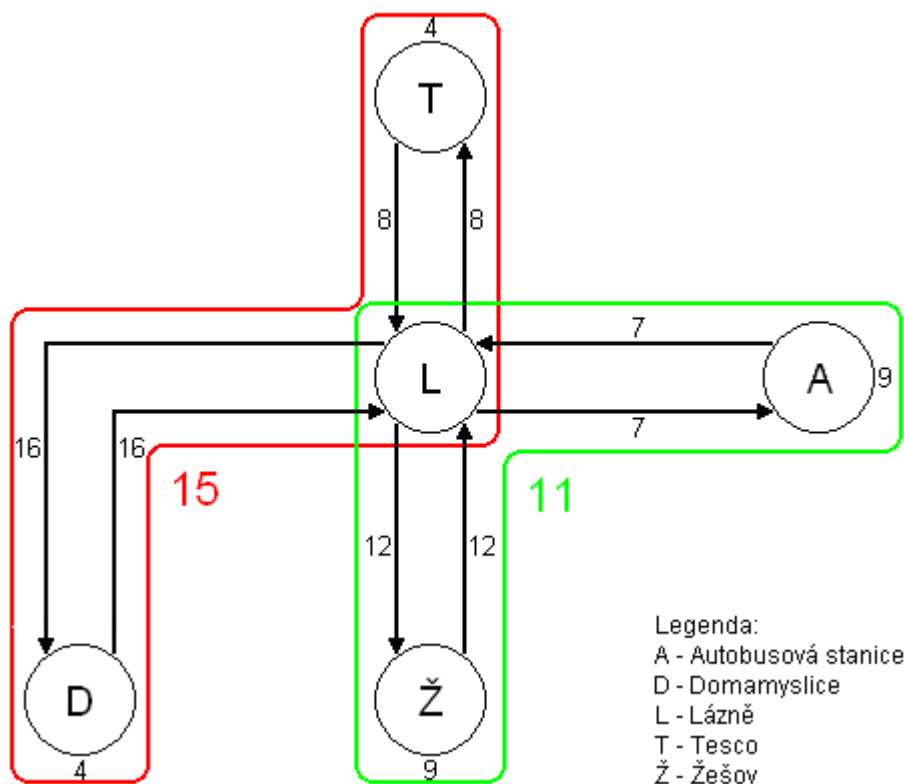
Problematickou je otázka stanovení počátečních odjezdů. Při modelování synchronizace linek MHD Prostějov byla ke stanovení počátečních odjezdů využita hodnota vlastního vektoru λ matice A zjištěná vztahem (137).

$$A \otimes x = \lambda \otimes x \quad (137)$$

Ke stanovení následných odjezdů byl využit vztah (138).

$$x(k+1) = A \otimes x(k) \quad (138)$$

V experimentu č. 1 se jedná o zajištění přestupu mezi linkami 11 a 15 na zastávce Lázně (Obr. č. 24) nahrazující přímé spojení v relaci aut. st. – sídl. E. Beneše, TESCO původně obsluhované linkou 32. Přestup je zajištěn systémem rovnic max-plus algebry, který zohledňuje příjezdy vozidel MHD ze sousedních zastávek. V daném případě množina zastávek $Z = \{A, D, L, T, Z\}$ obsahuje konečné zastávky A, D, T, Z a přestupní zastávku L.



Obr. č. 24: Fragment dopravní sítě MHD Prostějov obsahující linky 11 a 15

Dalšími potřebnými vstupními údaji v případě experimentu č. 1 jsou:

- provozní parametry linek 11 a 15 (viz. tab. č. 1),
- jízdní doby mezi zastávkami na linkách 11 a 15 (viz. tab. č. 2),
- požadavek na přestup na zastávce Lázně v relaci autobusová stanice - TESCO,
- požadavek na přestup na zastávce Lázně v relaci TESCO - autobusová stanice,
- každá linka je obsluhována jedním vozidlem.

Linka	Doba spoje [min]	Doba zdržení na konečné [min]	Doba linky [min]	Oběžná doba [min]	Linkový interval [min]
11	19	9	28	56	56
15	24	4	28	56	56

Tab. č. 1: Provozní parametry linek 11 a 15

Úsek mezi i-tou a j-tou zastávkou	Jízdní doba mezi i-tou a j-tou zastávkou [min]	Úsek mezi i-tou a j-tou zastávkou	Jízdní doba mezi i-tou a j-tou zastávkou [min]
A,L	7	T,L	8
L,A	7	L,T	8
D,L	16	Z,L	12
L,D	16	L,Z	12

Tab. č. 2: Jízdní doby mezi zastávkami na linkách 11 a 15

Varianty modelu podle kombinace výchozích zastávek jsou následující:

- Varianta č. 1 - výchozí zastávkou na lince 11 je zastávka autobusová stanice,
- výchozí zastávkou na lince 15 je zastávka Domamyslice,
- Varianta č. 2 - výchozí zastávkou na lince 11 je zastávka autobusová stanice,
- výchozí zastávkou na lince 15 je zastávka TESCO,
- Varianta č. 3 - výchozí zastávkou na lince 11 je zastávka Žešov,
- výchozí zastávkou na lince 15 je zastávka Domamyslice,
- Varianta č. 4 - výchozí zastávkou na lince 11 je zastávka Žešov,
- výchozí zastávkou na lince 15 je zastávka TESCO,

6.4.1 Systém rovnic varianty č. 1 zajišťující přestup mezi linkami 11 a 15

- výchozí zastávky autobusová stanice a Domamyslice

$$x_{A,L}(k+1) = \max(x_{A,L}(k) + l_{11}, x_{L,A}(k) + t_{L,A}) \quad (139)$$

Rovnice (139) zajišťuje, že odjezd ze zastávky autobusová stanice nastane po příjezdu ze zastávky Lázně a příjezdu z výchozí zastávky autobusová stanice.

$$x_{L,A}(k+1) = \max(x_{A,L}(k) + t_{A,Z} + t_{Z,L}, x_{T,L}(k) + t_{T,L}, x_{Z,L}(k) + t_{Z,L}) \quad (140)$$

Rovnice (140) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Lázně nastane po příjezdu ze zastávky Tesco a Žešov a příjezdu z výchozí zastávky autobusová stanice.

$$x_{D,L}(k+1) = \max(x_{D,L}(k) + l_{15}, x_{L,D}(k) + t_{L,D}) \quad (141)$$

Rovnice (141) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Domamyslice nastane po příjezdu ze zastávky Lázně a příjezdu z výchozí zastávky Domamyslice.

$$x_{L,D}(k+1) = \max(x_{D,L}(k) + t_{D,T} + t_{T,L}, x_{T,L}(k) + t_{T,L}) \quad (142)$$

Rovnice (142) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Lázně nastane po příjezdu ze zastávky Tesco a příjezdu z výchozí zastávky Domamyslice.

$$x_{T,L}(k+1) = \max(x_{D,L}(k) + t_{D,T}, x_{L,T}(k) + t_{L,T}) \quad (143)$$

Rovnice (143) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Tesco nastane po příjezdu ze zastávky Lázně a příjezdu z výchozí zastávky Domamyslice.

$$x_{L,T}(k+1) = \max(x_{A,L}(k) + t_{A,L}, x_{D,L}(k) + t_{D,L}) \quad (144)$$

Rovnice (144) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Lázně nastane po příjezdu ze zastávky autobusová stanice a příjezdu z výchozí zastávky Domamyslice.

$$x_{Z,L}(k+1) = \max(x_{A,L}(k) + t_{A,Z}, x_{L,Z}(k) + t_{L,Z}) \quad (145)$$

Rovnice (145) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Žešov nastane po příjezdu ze zastávky Lázně a příjezdu z výchozí zastávky autobusová stanice.

$$x_{L,Z}(k+1) = \max(x_{A,L}(k) + t_{A,L}, x_{Z,L}(k) + t_{Z,A} + t_{A,L}) \quad (146)$$

Rovnice (146) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Lázně nastane po příjezdu ze zastávky Žešov a příjezdu z výchozí zastávky autobusové stanice.

Stanovení odjezdů spojů ze zastávek na linkách 11 a 15

Na základě hodnot vstupních údajů dosazených do rovnic max-plus algebry, které zajišťují přestup mezi linkami 11 a 15 na zastávce Lázně, byla sestavena matice A .

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} A,L & L,A & D,L & L,D & T,L & L,T & Z,L & L,Z \end{matrix} \\ \begin{matrix} A,L \\ L,A \\ D,L \\ A=L,D \\ T,L \\ L,T \\ Z,L \\ L,Z \end{matrix} & \begin{pmatrix} 56 & 16 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 40 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8 & \varepsilon & 12 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 56 & 20 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 36 & \varepsilon & 8 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 28 & \varepsilon & \varepsilon & 12 & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & \varepsilon & 16 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 28 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 22 \\ 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & \varepsilon \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (147)$$

Následně byl pro sestavenou matici A (147) zjišťován vlastní vektor a vlastní číslo. Vlastní vektor byl zjišťován za účelem stanovení počátečních odjezdů ze zastávek na linkách 11 a 15 a vlastní číslo bylo zjišťováno za účelem stanovení odjezdů ze zastávek na linkách 11 a 15, při kterých bude opět dosaženo počátečních odjezdů.

```
A=[56 16 -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf;
40 -%inf -%inf -%inf 8 -%inf 12 -%inf;
-%inf -%inf 56 20 -%inf -%inf -%inf -%inf;
-%inf -%inf 36 -%inf 8 -%inf -%inf -%inf;
-%inf -%inf 28 -%inf -%inf 12 -%inf -%inf;
6 -%inf 16 -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf;
28 -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf 22;
6 -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf 34 -%inf];
```

```
-->s=maxplusscg(A)
-->[l,v,d] = maxplusmaxalgol(A)
-->x0=[112;96;112;92;84;72;84;62];
-->p=56;
-->[X]=maxplussys(A,x0,p)
```

112.	168.	224.	280.	336.	392.	448.	504.	560.	616.	672.	728.	784.	840.	896.	952.	1008.	1064.
96.	152.	208.	264.	320.	376.	432.	488.	544.	600.	656.	712.	768.	824.	880.	936.	992.	1048.
112.	168.	224.	280.	336.	392.	448.	504.	560.	616.	672.	728.	784.	840.	896.	952.	1008.	1064.
92.	148.	204.	260.	316.	372.	428.	484.	540.	596.	652.	708.	764.	820.	876.	932.	988.	1044.
84.	140.	196.	252.	308.	364.	420.	476.	532.	588.	644.	700.	756.	812.	868.	924.	980.	1036.
72.	128.	184.	240.	296.	352.	408.	464.	520.	576.	632.	688.	744.	800.	856.	912.	968.	1024.
84.	140.	196.	252.	308.	364.	420.	476.	532.	588.	644.	700.	756.	812.	868.	924.	980.	1036.
62.	118.	174.	230.	286.	342.	398.	454.	510.	566.	622.	678.	734.	790.	846.	902.	958.	1014.
column 19 to 34																	
1120.	1176.	1232.	1288.	1344.	1400.	1456.	1512.	1568.	1624.	1680.	1736.	1792.	1848.	1904.	1960.		
1104.	1160.	1216.	1272.	1328.	1384.	1440.	1496.	1552.	1608.	1664.	1720.	1776.	1832.	1888.	1944.		
1120.	1176.	1232.	1288.	1344.	1400.	1456.	1512.	1568.	1624.	1680.	1736.	1792.	1848.	1904.	1960.		
1100.	1156.	1212.	1268.	1324.	1380.	1436.	1492.	1548.	1604.	1660.	1716.	1772.	1828.	1884.	1940.		
1092.	1148.	1204.	1260.	1316.	1372.	1428.	1484.	1540.	1596.	1652.	1708.	1764.	1820.	1876.	1932.		
1080.	1136.	1192.	1248.	1304.	1360.	1416.	1472.	1528.	1584.	1640.	1696.	1752.	1808.	1864.	1920.		
1092.	1148.	1204.	1260.	1316.	1372.	1428.	1484.	1540.	1596.	1652.	1708.	1764.	1820.	1876.	1932.		
1070.	1126.	1182.	1238.	1294.	1350.	1406.	1462.	1518.	1574.	1630.	1686.	1742.	1798.	1854.	1910.		
column 35 to 50																	
2016.	2072.	2128.	2184.	2240.	2296.	2352.	2408.	2464.	2520.	2576.	2632.	2688.	2744.	2800.	2856.		
2000.	2056.	2112.	2168.	2224.	2280.	2336.	2392.	2448.	2504.	2560.	2616.	2672.	2728.	2784.	2840.		
2016.	2072.	2128.	2184.	2240.	2296.	2352.	2408.	2464.	2520.	2576.	2632.	2688.	2744.	2800.	2856.		
1996.	2052.	2108.	2164.	2220.	2276.	2332.	2388.	2444.	2500.	2556.	2612.	2668.	2724.	2780.	2836.		
1988.	2044.	2100.	2156.	2212.	2268.	2324.	2380.	2436.	2492.	2548.	2604.	2660.	2716.	2772.	2828.		
1976.	2032.	2088.	2144.	2200.	2256.	2312.	2368.	2424.	2480.	2536.	2592.	2648.	2704.	2760.	2816.		
1988.	2044.	2100.	2156.	2212.	2268.	2324.	2380.	2436.	2492.	2548.	2604.	2660.	2716.	2772.	2828.		
1966.	2022.	2078.	2134.	2190.	2246.	2302.	2358.	2414.	2470.	2526.	2582.	2638.	2694.	2750.	2806.		
column 51 to 57																	
2912.	2968.	3024.	3080.	3136.	3192.	3248.											
2896.	2952.	3008.	3064.	3120.	3176.	3232.											
2912.	2968.	3024.	3080.	3136.	3192.	3248.											
2892.	2948.	3004.	3060.	3116.	3172.	3228.											
2884.	2940.	2996.	3052.	3108.	3164.	3220.											
2872.	2928.	2984.	3040.	3096.	3152.	3208.											
2884.	2940.	2996.	3052.	3108.	3164.	3220.											
2862.	2918.	2974.	3030.	3086.	3142.	3198.											

6.4.2 Systém rovnic varianty č. 2 zajišťující přestup mezi linkami 11 a 15

- výchozí zastávky autobusová stanice a TESCO

$$x_{A,L}(k+1) = \max(x_{A,L}(k) + l_{11}, x_{L,A}(k) + t_{L,A}) \quad (148)$$

Rovnice (148) zajišťuje, že odjezd ze zastávky autobusová stanice nastane po příjezdu ze zastávky Lázně a příjezdu z výchozí zastávky autobusová stanice.

$$x_{L,A}(k+1) = \max(x_{A,L}(k) + t_{A,Z} + t_{Z,L}, x_{T,L}(k) + t_{T,L}, x_{Z,L}(k) + t_{Z,L}) \quad (149)$$

Rovnice (149) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Lázně nastane po příjezdu ze zastávky Tesco a Žešov a příjezdu z výchozí zastávky autobusová stanice.

$$x_{D,L}(k+1) = \max(x_{L,D}(k) + t_{L,D}, x_{T,L}(k) + t_{T,D}) \quad (150)$$

Rovnice (150) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Domamyslice nastane po příjezdu ze zastávky Lázně a příjezdu z výchozí zastávky Tesco.

$$x_{L,D}(k+1) = \max(x_{D,L}(k) + t_{D,T} + t_{T,L}, x_{T,L}(k) + t_{T,L}) \quad (151)$$

Rovnice (151) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Lázně nastane po příjezdu ze zastávky Domamyslice a příjezdu z výchozí zastávky Tesco.

$$x_{T,L}(k+1) = \max(x_{T,L}(k) + l_{15}, x_{L,T}(k) + t_{L,T}) \quad (152)$$

Rovnice (152) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Tesco nastane po příjezdu ze zastávky Lázně a příjezdu z výchozí zastávky Tesco.

$$x_{L,T}(k+1) = \max(x_{A,L}(k) + t_{A,L}, x_{D,L}(k) + t_{D,L}, x_{T,L}(k) + t_{T,D} + t_{D,L}) \quad (153)$$

Rovnice (153) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Lázně nastane po příjezdu ze zastávky autobusová stanice a Domamyslice a příjezdu z výchozí zastávky Tesco.

$$x_{Z,L}(k+1) = \max(x_{A,L}(k) + t_{A,Z}, x_{L,Z}(k) + t_{L,Z}) \quad (154)$$

Rovnice (154) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Žešov nastane po příjezdu ze zastávky Lázně a příjezdu z výchozí zastávky autobusová stanice.

$$x_{L,Z}(k+1) = \max(x_{A,L}(k) + t_{A,L}, x_{Z,A}(k) + t_{Z,A} + t_{A,L}) \quad (155)$$

Rovnice (155) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Lázně nastane po příjezdu ze zastávky Žešov a příjezdu z výchozí zastávky autobusová stanice.

Stanovení odjezdů spojů ze zastávek na linkách 11 a 15

Na základě hodnot vstupních údajů dosazených do rovnic max-plus algebry, které zajišťují přestup mezi linkami 11 a 15 na zastávce Lázně, byla sestavena matice A .

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} A,L & L,A & D,L & L,D & T,L & L,T & Z,L & L,Z \end{matrix} \\ \begin{matrix} A,L \\ L,A \\ D,L \\ A=L,D \\ T,L \\ L,T \\ Z,L \\ L,Z \end{matrix} & \begin{pmatrix} 56 & 16 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 40 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8 & \varepsilon & 12 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 20 & 28 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 36 & \varepsilon & 8 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 56 & 12 & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & \varepsilon & 16 & \varepsilon & 44 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 28 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 22 \\ 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & \varepsilon \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (156)$$

[illegible]

6.4.3 Systém rovnic varianty č. 3 zajišťující přestup mezi linkami 11 a 15

- výchozí zastávky Domamyslice a Žešov

$$x_{A,L}(k+1) = \max(x_{L,A}(k) + t_{L,A}, x_{Z,L}(k) + t_{Z,A}) \quad (157)$$

Rovnice (157) zajišťuje, že odjezd ze zastávky autobusová stanice nastane po příjezdu ze zastávky Lázně a příjezdu z výchozí zastávky Žešov.

$$x_{L,A}(k+1) = \max(x_{T,L}(k) + t_{T,L}, x_{Z,L}(k) + t_{Z,L}) \quad (158)$$

Rovnice (158) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Lázně nastane po příjezdu ze zastávky Tesco a příjezdu z výchozí zastávky Žešov.

$$x_{D,L}(k+1) = \max(x_{D,L}(k) + l_{15}, x_{L,D}(k) + t_{L,D}) \quad (159)$$

Rovnice (159) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Domamyslice nastane po příjezdu ze zastávky Lázně a příjezdu z výchozí zastávky Domamyslice.

$$x_{L,D}(k+1) = \max(x_{D,L}(k) + t_{D,T} + t_{T,L}, x_{T,L}(k) + t_{T,L}) \quad (160)$$

Rovnice (160) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Lázně nastane po příjezdu ze zastávky Tesco a příjezdu z výchozí zastávky Domamyslice.

$$x_{T,L}(k+1) = \max(x_{D,L}(k) + t_{D,T}, x_{L,T}(k) + t_{L,T}) \quad (161)$$

Rovnice (161) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Tesco nastane po příjezdu ze zastávky Lázně a příjezdu z výchozí zastávky Domamyslice.

$$x_{L,T}(k+1) = \max(x_{A,L}(k) + t_{A,L}, x_{D,L}(k) + t_{D,L}) \quad (162)$$

Rovnice (162) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Lázně nastane po příjezdu ze zastávky autobusová stanice a příjezdu z výchozí zastávky Domamyslice.

$$x_{Z,L}(k+1) = \max(x_{Z,L}(k) + l_{11}, x_{L,Z}(k) + t_{L,Z}) \quad (163)$$

Rovnice (163) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Žešov nastane po příjezdu ze zastávky Lázně a příjezdu z výchozí zastávky Žešov.

$$x_{L,Z}(k+1) = \max(x_{A,L}(k) + t_{A,L}, x_{Z,L}(k) + t_{Z,A} + t_{A,L}) \quad (164)$$

Rovnice (164) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Lázně nastane po příjezdu ze zastávky autobusové stanice a příjezdu z výchozí zastávky Žešov.

Stanovení odjezdů spojů ze zastávek na linkách 11 a 15

Na základě hodnot vstupních údajů dosazených do rovnic max-plus algebry, které zajišťují přestup mezi linkami 11 a 15 na zastávce Lázně, byla sestavena matice A .

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} A,L & L,A & D,L & L,D & T,L & L,T & Z,L & L,Z \end{matrix} \\ \begin{matrix} A,L \\ L,A \\ D,L \\ A=L,D \\ T,L \\ L,T \\ Z,L \\ L,Z \end{matrix} & \begin{pmatrix} \varepsilon & 16 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 28 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8 & \varepsilon & 12 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 56 & 20 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 36 & \varepsilon & 8 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 28 & \varepsilon & \varepsilon & 12 & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & \varepsilon & 16 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 56 & 22 \\ 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & \varepsilon \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (165)$$

Následně byl pro sestavenou matici A (165) zjišťován vlastní vektor a vlastní číslo. Vlastní vektor byl zjišťován za účelem stanovení počátečních odjezdů ze zastávek na linkách 11 a 15 a vlastní číslo bylo zjišťováno za účelem stanovení odjezdů ze zastávek na linkách 11 a 15, při kterých bude opět dosaženo počátečních odjezdů.

```
A=[-%inf 16 -%inf -%inf -%inf -%inf 28 -%inf;
-%inf -%inf -%inf -%inf 8 -%inf 12 -%inf;
-%inf -%inf 56 20 -%inf -%inf -%inf -%inf;
-%inf -%inf 36 -%inf 8 -%inf -%inf -%inf;
-%inf -%inf 28 -%inf -%inf 12 -%inf -%inf;
6 -%inf 16 -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf;
-%inf -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf 56 22;
6 -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf 34 -%inf];
```

```
-->s=maxplusscg(A)
-->[l,v,d] = maxplusmaxalgol(A)
-->x0=[28;12;56;36;28;16;56;34];
-->p=56;
-->[X]=maxplussys(A,x0,p)
```

28.	84.	140.	196.	252.	308.	364.	420.	476.	532.	588.	644.	700.	756.	812.	868.	924.	980.
12.	68.	124.	180.	236.	292.	348.	404.	460.	516.	572.	628.	684.	740.	796.	852.	908.	964.
56.	112.	168.	224.	280.	336.	392.	448.	504.	560.	616.	672.	728.	784.	840.	896.	952.	1008.
36.	92.	148.	204.	260.	316.	372.	428.	484.	540.	596.	652.	708.	764.	820.	876.	932.	988.
28.	84.	140.	196.	252.	308.	364.	420.	476.	532.	588.	644.	700.	756.	812.	868.	924.	980.
16.	72.	128.	184.	240.	296.	352.	408.	464.	520.	576.	632.	688.	744.	800.	856.	912.	968.
56.	112.	168.	224.	280.	336.	392.	448.	504.	560.	616.	672.	728.	784.	840.	896.	952.	1008.
34.	90.	146.	202.	258.	314.	370.	426.	482.	538.	594.	650.	706.	762.	818.	874.	930.	986.
column 19 to 34																	
1036.	1092.	1148.	1204.	1260.	1316.	1372.	1428.	1484.	1540.	1596.	1652.	1708.	1764.	1820.	1876.		
1020.	1076.	1132.	1188.	1244.	1300.	1356.	1412.	1468.	1524.	1580.	1636.	1692.	1748.	1804.	1860.		
1064.	1120.	1176.	1232.	1288.	1344.	1400.	1456.	1512.	1568.	1624.	1680.	1736.	1792.	1848.	1904.		
1044.	1100.	1156.	1212.	1268.	1324.	1380.	1436.	1492.	1548.	1604.	1660.	1716.	1772.	1828.	1884.		
1036.	1092.	1148.	1204.	1260.	1316.	1372.	1428.	1484.	1540.	1596.	1652.	1708.	1764.	1820.	1876.		
1024.	1080.	1136.	1192.	1248.	1304.	1360.	1416.	1472.	1528.	1584.	1640.	1696.	1752.	1808.	1864.		
1064.	1120.	1176.	1232.	1288.	1344.	1400.	1456.	1512.	1568.	1624.	1680.	1736.	1792.	1848.	1904.		
1042.	1098.	1154.	1210.	1266.	1322.	1378.	1434.	1490.	1546.	1602.	1658.	1714.	1770.	1826.	1882.		
column 35 to 50																	
1932.	1988.	2044.	2100.	2156.	2212.	2268.	2324.	2380.	2436.	2492.	2548.	2604.	2660.	2716.	2772.		
1916.	1972.	2028.	2084.	2140.	2196.	2252.	2308.	2364.	2420.	2476.	2532.	2588.	2644.	2700.	2756.		
1960.	2016.	2072.	2128.	2184.	2240.	2296.	2352.	2408.	2464.	2520.	2576.	2632.	2688.	2744.	2800.		
1940.	1996.	2052.	2108.	2164.	2220.	2276.	2332.	2388.	2444.	2500.	2556.	2612.	2668.	2724.	2780.		
1932.	1988.	2044.	2100.	2156.	2212.	2268.	2324.	2380.	2436.	2492.	2548.	2604.	2660.	2716.	2772.		
1920.	1976.	2032.	2088.	2144.	2200.	2256.	2312.	2368.	2424.	2480.	2536.	2592.	2648.	2704.	2760.		
1960.	2016.	2072.	2128.	2184.	2240.	2296.	2352.	2408.	2464.	2520.	2576.	2632.	2688.	2744.	2800.		
1938.	1994.	2050.	2106.	2162.	2218.	2274.	2330.	2386.	2442.	2498.	2554.	2610.	2666.	2722.	2778.		
column 51 to 57																	
2828.	2884.	2940.	2996.	3052.	3108.	3164.											
2812.	2868.	2924.	2980.	3036.	3092.	3148.											
2856.	2912.	2968.	3024.	3080.	3136.	3192.											
2836.	2892.	2948.	3004.	3060.	3116.	3172.											
2828.	2884.	2940.	2996.	3052.	3108.	3164.											
2816.	2872.	2928.	2984.	3040.	3096.	3152.											
2856.	2912.	2968.	3024.	3080.	3136.	3192.											
2834.	2890.	2946.	3002.	3058.	3114.	3170.											

6.4.4 Systém rovnic varianty č. 4 zajišťující přestup mezi linkami 11 a 15

- výchozí zastávky TESCO a Žešov

$$x_{A,L}(k+1) = \max(x_{L,A}(k) + t_{L,A}, x_{Z,L}(k) + t_{Z,A}) \quad (166)$$

Rovnice (166) zajišťuje, že odjezd ze zastávky autobusová stanice nastane po příjezdu ze zastávky Lázně a příjezdu z výchozí zastávky Žešov.

$$x_{L,A}(k+1) = \max(x_{T,L}(k) + t_{T,L}, x_{Z,L}(k) + t_{Z,L}) \quad (167)$$

Rovnice (167) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Lázně nastane po příjezdu ze zastávky Tesco a příjezdu z výchozí zastávky Žešov.

$$x_{D,L}(k+1) = \max(x_{L,D}(k) + t_{L,D}, x_{T,L}(k) + t_{T,D}) \quad (168)$$

Rovnice (168) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Domamyslice nastane po příjezdu ze zastávky Lázně a příjezdu z výchozí zastávky Tesco.

$$x_{L,D}(k+1) = \max(x_{D,L}(k) + t_{D,T} + t_{T,L}, x_{T,L}(k) + t_{T,L}) \quad (169)$$

Rovnice (169) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Lázně nastane po příjezdu ze zastávky Domamyslice a příjezdu z výchozí zastávky Tesco.

$$x_{T,L}(k+1) = \max(x_{T,L}(k) + l_{15}, x_{L,T}(k) + t_{L,T}) \quad (170)$$

Rovnice (170) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Tesco nastane po příjezdu ze zastávky Lázně a příjezdu z výchozí zastávky Tesco.

$$x_{L,T}(k+1) = \max(x_{A,L}(k) + t_{A,L}, x_{D,L}(k) + t_{D,L}, x_{T,L}(k) + t_{T,D} + t_{D,L}) \quad (171)$$

Rovnice (171) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Lázně nastane po příjezdu ze zastávky autobusová stanice a Domamyslice a příjezdu z výchozí zastávky Tesco.

$$x_{Z,L}(k+1) = \max(x_{Z,L}(k) + l_{11}, x_{L,Z}(k) + t_{L,Z}) \quad (172)$$

Rovnice (172) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Žešov nastane po příjezdu ze zastávky Lázně a příjezdu z výchozí zastávky Žešov.

$$x_{L,Z}(k+1) = \max(x_{A,L}(k) + t_{A,L}, x_{Z,L}(k) + t_{Z,A} + t_{A,L}) \quad (173)$$

Rovnice (173) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Lázně nastane po příjezdu ze zastávky autobusová stanice a příjezdu z výchozí zastávky Žešov.

Stanovení odjezdů spojů ze zastávek na linkách 11 a 15

Na základě hodnot vstupních údajů dosazených do rovnic max-plus algebry, které zajišťují přestup mezi linkami 11 a 15 na zastávce Lázně, byla sestavena matice A .

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} A,L & L,A & D,L & L,D & T,L & L,T & Z,L & L,Z \end{matrix} \\ \begin{matrix} A,L \\ L,A \\ D,L \\ A=L,D \\ T,L \\ L,T \\ Z,L \\ L,Z \end{matrix} & \begin{pmatrix} \varepsilon & 16 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 28 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8 & \varepsilon & 12 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 20 & 28 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 36 & \varepsilon & 8 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 56 & 12 & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & \varepsilon & 16 & \varepsilon & 44 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 56 & 22 \\ 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & \varepsilon \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (174)$$

```
-->[l,v,d] = maxplusmaxalqol(A)
```

```
-->p=56;
```

	84.	140.	196.	252.	308.	364.	420.	476.	532.	588.	644.	700.	756.	812.	868.	924.	980.	1036.
68.	124.	180.	236.	292.	348.	404.	460.	516.	572.	628.	684.	740.	796.	852.	908.	964.	1020.	
84.	140.	196.	252.	308.	364.	420.	476.	532.	588.	644.	700.	756.	812.	868.	924.	980.	1036.	
64.	120.	176.	232.	288.	344.	400.	456.	512.	568.	624.	680.	736.	792.	848.	904.	960.	1016.	
112.	168.	224.	280.	336.	392.	448.	504.	560.	616.	672.	728.	784.	840.	896.	952.	1008.	1064.	
100.	156.	212.	268.	324.	380.	436.	492.	548.	604.	660.	716.	772.	828.	884.	940.	996.	1052.	
112.	168.	224.	280.	336.	392.	448.	504.	560.	616.	672.	728.	784.	840.	896.	952.	1008.	1064.	
90.	146.	202.	258.	314.	370.	426.	482.	538.	594.	650.	706.	762.	818.	874.	930.	986.	1042.	
column 19 to 34																		
1092.	1148.	1204.	1260.	1316.	1372.	1428.	1484.	1540.	1596.	1652.	1708.	1764.	1820.	1876.	1932.			
1076.	1132.	1188.	1244.	1300.	1356.	1412.	1468.	1524.	1580.	1636.	1692.	1748.	1804.	1860.	1916.			
1092.	1148.	1204.	1260.	1316.	1372.	1428.	1484.	1540.	1596.	1652.	1708.	1764.	1820.	1876.	1932.			
1072.	1128.	1184.	1240.	1296.	1352.	1408.	1464.	1520.	1576.	1632.	1688.	1744.	1800.	1856.	1912.			
1120.	1176.	1232.	1288.	1344.	1400.	1456.	1512.	1568.	1624.	1680.	1736.	1792.	1848.	1904.	1960.			
1108.	1164.	1220.	1276.	1332.	1388.	1444.	1500.	1556.	1612.	1668.	1724.	1780.	1836.	1892.	1948.			
1120.	1176.	1232.	1288.	1344.	1400.	1456.	1512.	1568.	1624.	1680.	1736.	1792.	1848.	1904.	1960.			
1098.	1154.	1210.	1266.	1322.	1378.	1434.	1490.	1546.	1602.	1658.	1714.	1770.	1826.	1882.	1938.			
column 35 to 50																		
1988.	2044.	2100.	2156.	2212.	2268.	2324.	2380.	2436.	2492.	2548.	2604.	2660.	2716.	2772.	2828.			
1972.	2028.	2084.	2140.	2196.	2252.	2308.	2364.	2420.	2476.	2532.	2588.	2644.	2700.	2756.	2812.			
1988.	2044.	2100.	2156.	2212.	2268.	2324.	2380.	2436.	2492.	2548.	2604.	2660.	2716.	2772.	2828.			
1968.	2024.	2080.	2136.	2192.	2248.	2304.	2360.	2416.	2472.	2528.	2584.	2640.	2696.	2752.	2808.			
2016.	2072.	2128.	2184.	2240.	2296.	2352.	2408.	2464.	2520.	2576.	2632.	2688.	2744.	2800.	2856.			
2004.	2060.	2116.	2172.	2228.	2284.	2340.	2396.	2452.	2508.	2564.	2620.	2676.	2732.	2788.	2844.			
2016.	2072.	2128.	2184.	2240.	2296.	2352.	2408.	2464.	2520.	2576.	2632.	2688.	2744.	2800.	2856.			
1994.	2050.	2106.	2162.	2218.	2274.	2330.	2386.	2442.	2498.	2554.	2610.	2666.	2722.					

Srovnání výsledků

Relace	Doba přestupu [min]			
	Varianta 1	Varianta 2	Varianta 3	Varianta 4
aut. st. – Lázně – Tesco	9	37	37	9
Tesco – Lázně – aut. st.	4	32	32	4

Tab. č. 3: Srovnání výsledků jednotlivých variant

aut. st. – Lázně – Tesco			
Relace	Příjezd	Relace	Odjezd
aut.st. - Lázně	5:26	Lázně - TESCO	5:35
	6:22		6:31
	7:18		7:27
	8:14		8:23
	9:10		9:19
	10:05		10:14
	11:01		11:10
	11:57		12:06
	12:53		13:02
	13:49		13:58
	14:45		14:54
	15:41		15:50
	16:37		16:46
	17:33		17:42

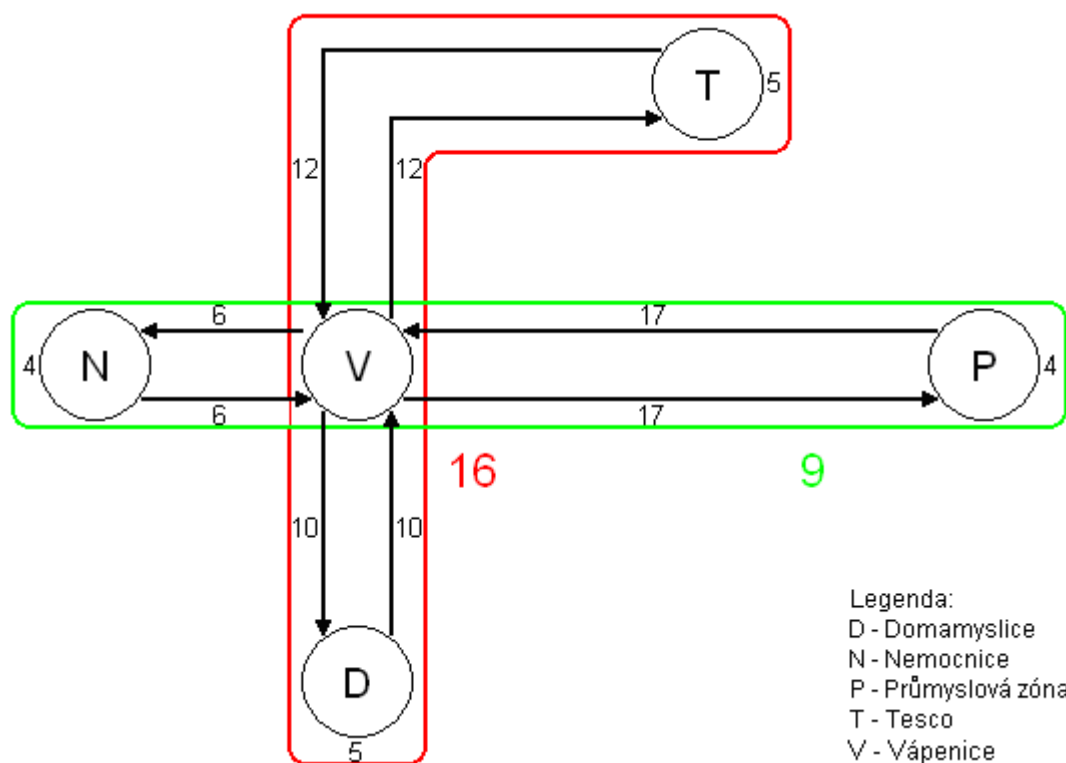
Tab. č. 4: Příklad jízdního řádu pro variantu 1 ve směru aut.st. - TESCO

TESCO – Lázně – aut. st.			
Relace	Příjezd	Relace	Odjezd
TESCO - Lázně	5:08	Lázně - aut.st.	5:12
	6:04		6:08
	7:00		7:04
	7:56		8:00
	8:52		8:56
	9:48		9:52
	10:44		10:48
	11:40		11:44
	12:36		12:40
	13:32		13:36
	14:28		14:32
	15:24		15:28
	16:20		16:24
	17:16		17:20

Tab. č. 5: Příklad jízdního řádu pro variantu 1 ve směru TESCO - aut. st

6.5 Experiment č. 2

V tomto experimentu se jedná o zajištění přestupu mezi linkami 9 a 16 na zastávce Vápenice (Obr. č. 25) nahrazující přímé spojení v relaci Domamyslice – OP původně obsluhované linkou 74. Přestup je zajištěn systémem rovnic max-plus algebry, který zohledňuje příjezdy vozidel MHD ze sousedních zastávek. V daném případě množina zastávek $Z = \{D, N, P, T, V\}$ obsahuje konečné zastávky D, N, P, T a přestupní zastávku V.



Obr. č. 25: Fragment dopravní sítě MHD Prostějov obsahující linky 9 a 16

Dalšími potřebnými vstupními údaji v případě experimentu č. 1 jsou:

- provozní parametry linek 9 a 16 (viz. tab. č. 6),
- jízdní doby mezi zastávkami na linkách 9 a 16 (viz. tab. č. 7),
- požadavek na přestup na zastávce Vápenice v relaci Domamyslice – Prům. zóna,
- požadavek na přestup na zastávce Vápenice v relaci Prům. zóna – Domamyslice,
- každá linka je obsluhována jedním vozidlem.

Linka	Doba spoje [min]	Doba zdržení na konečné [min]	Doba linky [min]	Oběžná doba [min]	Linkový interval [min]
9	23	4	27	54	54
16	22	5	27	54	54

Tab. č. 6: Provozní parametry linek 9 a 16

Úsek mezi i-tou a j-tou zastávkou	Jízdní doba mezi i-tou a j-tou zastávkou [min]	Úsek mezi i-tou a j-tou zastávkou	Jízdní doba mezi i-tou a j-tou zastávkou [min]
D,V	10	P,V	17
V,D	10	V,P	17
N,V	6	T,V	12
V,N	6	V,T	12

Tab. č. 7: Jízdní doby mezi zastávkami na linkách 9 a 16

Varianty modelu podle kombinace výchozích zastávek jsou následující:

- Varianta č. 1 - výchozí zastávkou na lince 9 je zastávka nemocnice,
- výchozí zastávkou na lince 16 je zastávka Domamyslice,
- Varianta č. 2 - výchozí zastávkou na lince 9 je zastávka Průmyslová zóna,
- výchozí zastávkou na lince 16 je zastávka Domamyslice,
- Varianta č. 3 - výchozí zastávkou na lince 9 je zastávka nemocnice,
- výchozí zastávkou na lince 16 je zastávka TESCO,
- Varianta č. 4 - výchozí zastávkou na lince 9 je zastávka Průmyslová zóna,
- výchozí zastávkou na lince 16 je zastávka TESCO,

6.5.1 Systém rovnic varianty č. 1 zajišťující přestup mezi linkami 9 a 16

- výchozí zastávky Domamyslice a nemocnice

$$x_{D,V}(k+1) = \max(x_{D,V}(k) + l_{16}, x_{V,D}(k) + t_{V,D}) \quad (175)$$

Rovnice (175) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Domamyslice nastane po příjezdu ze zastávky Vápenice a příjezdu z výchozí zastávky Domamyslice.

$$x_{V,D}(k+1) = \max(x_{D,V}(k) + t_{D,T} + t_{T,V}, x_{P,V}(k) + t_{P,V}, x_{T,V}(k) + t_{T,V}) \quad (176)$$

Rovnice (176) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Vápenice nastane po příjezdu ze zastávky Průmyslová zóna a Tesco a příjezdu z výchozí zastávky Domamyslice.

$$x_{N,V}(k+1) = \max(x_{N,V}(k) + l_9, x_{V,N}(k) + t_{V,N}) \quad (177)$$

Rovnice (177) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Nemocnice nastane po příjezdu ze zastávky Vápenice a příjezdu z výchozí zastávky Nemocnice.

$$x_{V,N}(k+1) = \max(x_{N,V}(k) + t_{N,P} + t_{P,V}, x_{P,V}(k) + t_{P,V}) \quad (178)$$

Rovnice (178) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Vápenice nastane po příjezdu ze zastávky Průmyslová zóna a příjezdu z výchozí zastávky Nemocnice.

$$x_{P,V}(k+1) = \max(x_{N,V}(k) + t_{N,P}, x_{V,P}(k) + t_{V,P}) \quad (179)$$

Rovnice (179) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Průmyslová zóna nastane po příjezdu ze zastávky Vápenice a z výchozí zastávky Nemocnice.

$$x_{V,P}(k+1) = \max(x_{D,V}(k) + t_{D,V}, x_{N,V}(k) + t_{N,V}) \quad (180)$$

Rovnice (180) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Vápenice nastane po příjezdu ze zastávky Domamyslice a příjezdu z výchozí zastávky Nemocnice.

$$x_{T,V}(k+1) = \max(x_{D,V}(k) + t_{D,T}, x_{V,T}(k) + t_{V,T}) \quad (181)$$

Rovnice (181) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Tesco nastane po příjezdu ze zastávky Vápenice a příjezdu z výchozí zastávky Domamyslice.

$$x_{V,T}(k+1) = \max(x_{D,V}(k) + t_{D,V}, \varepsilon) \quad (182)$$

Rovnice (182) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Vápenice nastane po příjezdu z výchozí zastávky Domamyslice.

Stanovení odjezdů spojů ze zastávek na linkách 9 a 16

Na základě hodnot vstupních údajů dosazených do rovnic Max-plus algebry, které zajišťují přestup mezi linkami 9 a 16 na zastávce Vápenice, byla sestavena matice A .

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} D,V & V,D & N,V & V,N & P,V & V,P & T,V & V,T \end{matrix} \\ \begin{matrix} D,V \\ V,D \\ N,V \\ V,N \\ P,V \\ V,P \\ T,V \\ V,T \end{matrix} & \begin{pmatrix} 54 & 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 39 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 17 & \varepsilon & 12 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 54 & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 44 & \varepsilon & 17 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 27 & \varepsilon & \varepsilon & 21 & \varepsilon & \varepsilon \\ 10 & \varepsilon & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 27 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 17 \\ 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (183)$$

Následně byl pro sestavenou matici A (183) zjišťován vlastní vektor a vlastní číslo. Vlastní vektor byl zjišťován za účelem stanovení počátečních odjezdů ze zastávek na linkách 9 a 16 a vlastní číslo bylo zjišťováno za účelem stanovení odjezdů ze zastávek na linkách 9 a 16, při kterých bude opět dosaženo počátečních odjezdů.

```
A=[54 15 -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf;
39 -%inf -%inf -%inf 17 -%inf 12 -%inf;
-%inf -%inf 54 10 -%inf -%inf -%inf -%inf;
-%inf -%inf 44 -%inf 17 -%inf -%inf -%inf;
-%inf -%inf 27 -%inf -%inf 21 -%inf -%inf;
10 -%inf 6 -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf;
27 -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf 17;
10 -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf];
```

```
-->s=maxplusscg(A)
-->[l,v,d] = maxplusmaxalgol(A)
-->x0=[54;39;54;44;27;10;27;10];
-->p=54;
-->[X]=maxplussys(A,x0,p)
```

```
54. 108. 162. 216. 270. 324. 378. 432. 486. 540. 594. 648. 702. 756. 810. 864. 918. 972. 1026.
39. 93. 147. 201. 255. 309. 363. 417. 471. 525. 579. 633. 687. 741. 795. 849. 903. 957. 1011.
54. 108. 162. 216. 270. 324. 378. 432. 486. 540. 594. 648. 702. 756. 810. 864. 918. 972. 1026.
44. 98. 152. 206. 260. 314. 368. 422. 476. 530. 584. 638. 692. 746. 800. 854. 908. 962. 1016.
27. 81. 135. 189. 243. 297. 351. 405. 459. 513. 567. 621. 675. 729. 783. 837. 891. 945. 999.
10. 64. 118. 172. 226. 280. 334. 388. 442. 496. 550. 604. 658. 712. 766. 820. 874. 928. 982.
27. 81. 135. 189. 243. 297. 351. 405. 459. 513. 567. 621. 675. 729. 783. 837. 891. 945. 999.
10. 64. 118. 172. 226. 280. 334. 388. 442. 496. 550. 604. 658. 712. 766. 820. 874. 928. 982.
column 20 to 35
1080. 1134. 1188. 1242. 1296. 1350. 1404. 1458. 1512. 1566. 1620. 1674. 1728. 1782. 1836. 1890.
1065. 1119. 1173. 1227. 1281. 1335. 1389. 1443. 1497. 1551. 1605. 1659. 1713. 1767. 1821. 1875.
1080. 1134. 1188. 1242. 1296. 1350. 1404. 1458. 1512. 1566. 1620. 1674. 1728. 1782. 1836. 1890.
1070. 1124. 1178. 1232. 1286. 1340. 1394. 1448. 1502. 1556. 1610. 1664. 1718. 1772. 1826. 1880.
1053. 1107. 1161. 1215. 1269. 1323. 1377. 1431. 1485. 1539. 1593. 1647. 1701. 1755. 1809. 1863.
1036. 1090. 1144. 1198. 1252. 1306. 1360. 1414. 1468. 1522. 1576. 1630. 1684. 1738. 1792. 1846.
1053. 1107. 1161. 1215. 1269. 1323. 1377. 1431. 1485. 1539. 1593. 1647. 1701. 1755. 1809. 1863.
1036. 1090. 1144. 1198. 1252. 1306. 1360. 1414. 1468. 1522. 1576. 1630. 1684. 1738. 1792. 1846.
```

column 36 to 51													
1944.	1998.	2052.	2106.	2160.	2214.	2268.	2322.	2376.	2430.	2484.	2538.	2592.	2646.
1929.	1983.	2037.	2091.	2145.	2199.	2253.	2307.	2361.	2415.	2469.	2523.	2577.	2631.
1944.	1998.	2052.	2106.	2160.	2214.	2268.	2322.	2376.	2430.	2484.	2538.	2592.	2646.
1934.	1988.	2042.	2096.	2150.	2204.	2258.	2312.	2366.	2420.	2474.	2528.	2582.	2636.
1917.	1971.	2025.	2079.	2133.	2187.	2241.	2295.	2349.	2403.	2457.	2511.	2565.	2619.
1900.	1954.	2008.	2062.	2116.	2170.	2224.	2278.	2332.	2386.	2440.	2494.	2548.	2602.
1917.	1971.	2025.	2079.	2133.	2187.	2241.	2295.	2349.	2403.	2457.	2511.	2565.	2619.
1900.	1954.	2008.	2062.	2116.	2170.	2224.	2278.	2332.	2386.	2440.	2494.	2548.	2602.
column 52 to 55													
2808.	2862.	2916.	2970.										
2793.	2847.	2901.	2955.										
2808.	2862.	2916.	2970.										
2798.	2852.	2906.	2960.										
2781.	2835.	2889.	2943.										
2764.	2818.	2872.	2926.										
2781.	2835.	2889.	2943.										
2764.	2818.	2872.	2926.										

6.5.2 Systém rovnic varianty č. 2 zajišťující přestup mezi linkami 9 a 16

- výchozí zastávky Domamyslice a Průmyslová zóna

$$x_{D,V}(k+1) = \max(x_{D,V}(k) + l_{16}, x_{V,D}(k) + t_{V,D}) \quad (184)$$

Rovnice (184) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Domamyslice nastane po příjezdu ze zastávky Vápenice a příjezdu z výchozí zastávky Domamyslice.

$$x_{V,D}(k+1) = \max(x_{D,V}(k) + t_{D,T} + t_{T,V}, x_{P,V}(k) + t_{P,V}, x_{T,V}(k) + t_{T,V}) \quad (185)$$

Rovnice (185) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Vápenice nastane po příjezdu ze zastávky Průmyslová zóna a Tesco a příjezdu z výchozí zastávky Domamyslice.

$$x_{N,V}(k+1) = \max(x_{V,N}(k) + t_{V,N}, x_{P,V}(k) + t_{P,N}) \quad (186)$$

Rovnice (186) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Nemocnice nastane po příjezdu ze zastávky Vápenice a příjezdu z výchozí zastávky Průmyslová zóna.

$$x_{V,N}(k+1) = \max(x_{P,V}(k) + t_{P,V}, \epsilon) \quad (187)$$

Rovnice (187) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Vápenice nastane po příjezdu z výchozí zastávky Průmyslová zóna.

$$x_{P,V}(k+1) = \max(x_{P,V}(k) + l_9, x_{V,P}(k) + t_{V,P}) \quad (188)$$

Rovnice (188) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Průmyslová zóna nastane po příjezdu ze zastávky Vápenice a příjezdu z výchozí zastávky Průmyslová zóna.

$$x_{V,P}(k+1) = \max(x_{D,V}(k) + t_{D,V}, x_{N,V}(k) + t_{N,V}, x_{P,V}(k) + t_{P,N} + t_{N,V}) \quad (189)$$

Rovnice (189) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Vápenice nastane po příjezdu ze zastávky Domamyslice a Nemocnice a příjezdu z výchozí zastávky Průmyslová zóna.

$$x_{T,V}(k+1) = \max(x_{D,V}(k) + t_{D,T}, x_{V,T}(k) + t_{V,T}) \quad (190)$$

Rovnice (190) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Tesco nastane po příjezdu ze zastávky Vápenice a příjezdu z výchozí zastávky Domamyslice.

$$x_{V,T}(k+1) = \max(x_{D,V}(k) + t_{D,V}, \varepsilon) \quad (191)$$

Rovnice (191) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Vápenice nastane po příjezdu z výchozí zastávky Domamyslice.

Stanovení odjezdů spojů ze zastávek na linkách 9 a 16

Na základě hodnot vstupních údajů dosazených do rovnic Max-plus algebry, které zajišťují přestup mezi linkami 9 a 16 na zastávce Vápenice, byla sestavena matice A .

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} D,V & V,D & N,V & V,N & P,V & V,P & T,V & V,T \end{matrix} \\ \begin{matrix} D,V \\ V,D \\ N,V \\ A=V,N \\ P,V \\ V,P \\ T,V \\ V,T \end{matrix} & \begin{pmatrix} 54 & 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 39 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 17 & \varepsilon & 12 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10 & 27 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 17 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 54 & 21 & \varepsilon & \varepsilon \\ 10 & \varepsilon & 6 & \varepsilon & 33 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 27 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 17 \\ 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (192)$$

Následně byl pro sestavenou matici A (192) zjišťován vlastní vektor a vlastní číslo. Vlastní vektor byl zjišťován za účelem stanovení počátečních odjezdů ze zastávek na linkách 9 a 16 a vlastní číslo bylo zjišťováno za účelem stanovení odjezdů ze zastávek na linkách 9 a 16, při kterých bude opět dosaženo počátečních odjezdů.

```
-->s=maxplusscg(A)
-->[l,v,d] = maxplusmaxalgor(A)
-->x0=[54;39;27;17;54;33;27;10];
-->p=54;
-->[X]=maxplussys(A,x0,p)
```

54.	108.	162.	216.	270.	324.	378.	432.	486.	540.	594.	648.	702.	756.	810.	864.	918.	972.	1026.
39.	93.	147.	201.	255.	309.	363.	417.	471.	525.	579.	633.	687.	741.	795.	849.	903.	957.	1011.
27.	81.	135.	189.	243.	297.	351.	405.	459.	513.	567.	621.	675.	729.	783.	837.	891.	945.	999.
17.	71.	125.	179.	233.	287.	341.	395.	449.	503.	557.	611.	665.	719.	773.	827.	881.	935.	989.
54.	108.	162.	216.	270.	324.	378.	432.	486.	540.	594.	648.	702.	756.	810.	864.	918.	972.	1026.
33.	87.	141.	195.	249.	303.	357.	411.	465.	519.	573.	627.	681.	735.	789.	843.	897.	951.	1005.
27.	81.	135.	189.	243.	297.	351.	405.	459.	513.	567.	621.	675.	729.	783.	837.	891.	945.	999.
10.	64.	118.	172.	226.	280.	334.	388.	442.	496.	550.	604.	658.	712.	766.	820.	874.	928.	982.
column 20 to 35																		
1080.	1134.	1188.	1242.	1296.	1350.	1404.	1458.	1512.	1566.	1620.	1674.	1728.	1782.	1836.	1890.			
1065.	1119.	1173.	1227.	1281.	1335.	1389.	1443.	1497.	1551.	1605.	1659.	1713.	1767.	1821.	1875.			
1053.	1107.	1161.	1215.	1269.	1323.	1377.	1431.	1485.	1539.	1593.	1647.	1701.	1755.	1809.	1863.			
1043.	1097.	1151.	1205.	1259.	1313.	1367.	1421.	1475.	1529.	1583.	1637.	1691.	1745.	1799.	1853.			
1080.	1134.	1188.	1242.	1296.	1350.	1404.	1458.	1512.	1566.	1620.	1674.	1728.	1782.	1836.	1890.			
1059.	1113.	1167.	1221.	1275.	1329.	1383.	1437.	1491.	1545.	1599.	1653.	1707.	1761.	1815.	1869.			
1053.	1107.	1161.	1215.	1269.	1323.	1377.	1431.	1485.	1539.	1593.	1647.	1701.	1755.	1809.	1863.			
1036.	1090.	1144.	1198.	1252.	1306.	1360.	1414.	1468.	1522.	1576.	1630.	1684.	1738.	1792.	1846.			
column 36 to 51																		
1944.	1998.	2052.	2106.	2160.	2214.	2268.	2322.	2376.	2430.	2484.	2538.	2592.	2646.	2700.	2754.			
1929.	1983.	2037.	2091.	2145.	2199.	2253.	2307.	2361.	2415.	2469.	2523.	2577.	2631.	2685.	2739.			
1917.	1971.	2025.	2079.	2133.	2187.	2241.	2295.	2349.	2403.	2457.	2511.	2565.	2619.	2673.	2727.			
1907.	1961.	2015.	2069.	2123.	2177.	2231.	2285.	2339.	2393.	2447.	2501.	2555.	2609.	2663.	2717.			
1944.	1998.	2052.	2106.	2160.	2214.	2268.	2322.	2376.	2430.	2484.	2538.	2592.	2646.	2700.	2754.			
1923.	1977.	2031.	2085.	2139.	2193.	2247.	2301.	2355.	2409.	2463.	2517.	2571.	2625.	2679.	2733.			
1917.	1971.																	

6.5.3 Systém rovnic varianty č. 3 zajišťující přestup mezi linkami 9 a 16

- výchozí zastávky TESCO a nemocnice

$$x_{D,V}(k+1) = \max(x_{V,D}(k) + t_{V,D}, x_{T,V}(k) + t_{T,D}) \quad (193)$$

Rovnice (193) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Domamyslice nastane po příjezdu ze zastávky Vápenice a příjezdu z výchozí zastávky Tesco.

$$x_{V,D}(k+1) = \max(x_{P,V}(k) + t_{P,V}, x_{T,V}(k) + t_{T,V}) \quad (194)$$

Rovnice (194) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Vápenice nastane po příjezdu ze zastávky Průmyslová zóna a příjezdu z výchozí zastávky Tesco.

$$x_{N,V}(k+1) = \max(x_{N,V}(k) + l_9, x_{V,N}(k) + t_{V,N}) \quad (195)$$

Rovnice (195) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Nemocnice nastane po příjezdu ze zastávky Vápenice a příjezdu z výchozí zastávky Nemocnice.

$$x_{V,N}(k+1) = \max(x_{N,V}(k) + t_{N,P} + t_{P,V}, x_{P,V}(k) + t_{P,V}) \quad (196)$$

Rovnice (196) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Vápenice nastane po příjezdu ze zastávky Průmyslová zóna a příjezdu z výchozí zastávky Nemocnice.

$$x_{P,V}(k+1) = \max(x_{N,V}(k) + t_{N,P}, x_{V,P}(k) + t_{V,P}) \quad (197)$$

Rovnice (197) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Průmyslová zóna nastane po příjezdu ze zastávky Vápenice a příjezdu z výchozí zastávky Nemocnice.

$$x_{V,P}(k+1) = \max(x_{D,V}(k) + t_{D,V}, x_{N,V}(k) + t_{N,V}) \quad (198)$$

Rovnice (198) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Vápenice nastane po příjezdu ze zastávky Domamyslice a příjezdu z výchozí zastávky Nemocnice.

$$x_{T,V}(k+1) = \max(x_{T,V}(k) + l_{16}, x_{V,T}(k) + t_{V,T}) \quad (199)$$

Rovnice (199) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Tesco nastane po příjezdu ze zastávky Vápenice a příjezdu z výchozí zastávky Tesco.

$$x_{V,T}(k+1) = \max(x_{D,V}(k) + t_{D,V}, x_{T,V}(k) + t_{T,D} + t_{D,V}) \quad (200)$$

Rovnice (200) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Vápenice nastane po příjezdu ze zastávky Domamyslice a příjezdu z výchozí zastávky Tesco.

Stanovení odjezdů spojů ze zastávek na linkách 9 a 16

Na základě hodnot vstupních údajů dosazených do rovnic Max-plus algebry, které zajišťují přestup mezi linkami 9 a 16 na zastávce Vápenice, byla sestavena matice A .

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} D,V & V,D & N,V & V,N & P,V & V,P & T,V & V,T \end{matrix} \\ \begin{matrix} D,V \\ V,D \\ N,V \\ A=V,N \\ P,V \\ V,P \\ T,V \\ V,T \end{matrix} & \begin{pmatrix} \varepsilon & 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 27 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 17 & \varepsilon & 12 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 54 & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 44 & \varepsilon & 17 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 27 & \varepsilon & \varepsilon & 21 & \varepsilon & \varepsilon \\ 10 & \varepsilon & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 54 & 17 \\ 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 37 & \varepsilon \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (201)$$

Následně byl pro sestavenou matici A (201) zjišťován vlastní vektor a vlastní číslo. Vlastní vektor byl zjišťován za účelem stanovení počátečních odjezdů ze zastávek na linkách 9 a 16 a vlastní číslo bylo zjišťováno za účelem stanovení odjezdů ze zastávek na linkách 9 a 16, při kterých bude opět dosaženo počátečních odjezdů.

```
A=[-%inf 15 -%inf -%inf -%inf -%inf 27 -%inf;
-%inf -%inf -%inf -%inf 17 -%inf 12 -%inf;
-%inf -%inf 54 10 -%inf -%inf -%inf -%inf;
-%inf -%inf 44 -%inf 17 -%inf -%inf -%inf;
-%inf -%inf 27 -%inf -%inf 21 -%inf -%inf;
10 -%inf 6 -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf;
-%inf -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf 54 17;
10 -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf 37 -%inf];
```

```
-->s=maxplusscg(A)
-->[l,v,d] = maxplusmaxalgol(A)
-->x0=[81;66;108;98;81;60;108;91];
-->p=54;
-->[X]=maxplussys(A,x0,p)
```

81.	135.	189.	243.	297.	351.	405.	459.	513.	567.	621.	675.	729.	783.	837.	891.	945.	999.
66.	120.	174.	228.	282.	336.	390.	444.	498.	552.	606.	660.	714.	768.	822.	876.	930.	984.
108.	162.	216.	270.	324.	378.	432.	486.	540.	594.	648.	702.	756.	810.	864.	918.	972.	1026.
98.	152.	206.	260.	314.	368.	422.	476.	530.	584.	638.	692.	746.	800.	854.	908.	962.	1016.
81.	135.	189.	243.	297.	351.	405.	459.	513.	567.	621.	675.	729.	783.	837.	891.	945.	999.
60.	114.	168.	222.	276.	330.	384.	438.	492.	546.	600.	654.	708.	762.	816.	870.	924.	978.
108.	162.	216.	270.	324.	378.	432.	486.	540.	594.	648.	702.	756.	810.	864.	918.	972.	1026.
91.	145.	199.	253.	307.	361.	415.	469.	523.	577.	631.	685.	739.	793.	847.	901.	955.	1009.
column 19 to 34																	
1053.	1107.	1161.	1215.	1269.	1323.	1377.	1431.	1485.	1539.	1593.	1647.	1701.	1755.	1809.	1863.		
1038.	1092.	1146.	1200.	1254.	1308.	1362.	1416.	1470.	1524.	1578.	1632.	1686.	1740.	1794.	1848.		
1080.	1134.	1188.	1242.	1296.	1350.	1404.	1458.	1512.	1566.	1620.	1674.	1728.	1782.	1836.	1890.		
1070.	1124.	1178.	1232.	1286.	1340.	1394.	1448.	1502.	1556.	1610.	1664.	1718.	1772.	1826.	1880.		
1053.	1107.	1161.	1215.	1269.	1323.	1377.	1431.	1485.	1539.	1593.	1647.	1701.	1755.	1809.	1863.		
1032.	1086.	1140.	1194.	1248.	1302.	1356.	1410.	1464.	1518.	1572.	1626.	1680.	1734.	1788.	1842.		
1080.	1134.	1188.	1242.	1296.	1350.	1404.	1458.	1512.	1566.	1620.	1674.	1728.	1782.	1836.	1890.		
1063.	1117.	1171.	1225.	1279.	1333.	1387.	1441.	1495.	1549.	1603.	1657.	1711.	1765.	1819.	1873.		
column 35 to 50																	
1917.	1971.	2025.	2079.	2133.	2187.	2241.	2295.	2349.	2403.	2457.	2511.	2565.	2619.	2673.	2727.		
1902.	1956.	2010.	2064.	2118.	2172.	2226.	2280.	2334.	2388.	2442.	2496.	2550.	2604.	2658.	2712.		
1944.	1998.	2052.	2106.	2160.	2214.	2268.	2322.	2376.	2430.	2484.	2538.	2592.	2646.	2700.	2754.		
1934.	1988.	2042.	2096.	2150.	2204.	2258.	2312.	2366.	2420.	2474.	2528.	2582.	2636.	2690.	2744.		
1917.	1971.	2025.	2079.	2133.	2187.	2241.	2295.	2349.	2403.	2457.	2511.	2565.	2619.	2673.	2727.		
1896.	1950.	2004.	2058.	2112.	2166.	2220.	2274.	2328.	2382.	2436.	2490.	2544.	2598.	2652.	2706.		
1944.	1998.	2052.	2106.	2160.	2214.	2268.	2322.	2376.	2430.	2484.	2538.	2592.	2646.	2700.	2754.		
1927.	1981.	2035.	2089.	2143.	2197.	2251.	2305.	2359.	2413.	2467.	2521.	2575.	2629.	2683.	2737.		
column 51 to 55																	
2781.	2835.	2889.	2943.	2997.													
2766.	2820.	2874.	2928.	2982.													
2808.	2862.	2916.	2970.	3024.													
2798.	2852.	2906.	2960.	3014.													
2781.	2835.	2889.	2943.	2997.													
2760.	2814.	2868.	2922.	2976.													
2808.	2862.	2916.	2970.	3024.													
2791.	2845.	2899.	2953.	3007.													

6.5.4 Systém rovnic varianty č. 4 zajišťující přestup mezi linkami 9 a 16

- výchozí zastávky TESCO a Průmyslová zóna

$$x_{D,V}(k+1) = \max(x_{V,D}(k) + t_{V,D}, x_{T,V}(k) + t_{T,D}) \quad (202)$$

Rovnice (202) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Domamyslice nastane po příjezdu ze zastávky Vápenice a příjezdu z výchozí zastávky Tesco.

$$x_{V,D}(k+1) = \max(x_{P,V}(k) + t_{P,V}, x_{T,V}(k) + t_{T,V}) \quad (203)$$

Rovnice (203) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Vápenice nastane po příjezdu ze zastávky Průmyslová zóna a příjezdu z výchozí zastávky Tesco.

$$x_{N,V}(k+1) = \max(x_{V,N}(k) + t_{V,N}, x_{P,V}(k) + t_{P,N}) \quad (204)$$

Rovnice (204) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Nemocnice nastane po příjezdu ze zastávky Vápenice a příjezdu z výchozí zastávky Průmyslová zóna.

$$x_{V,N}(k+1) = \max(x_{P,V}(k) + t_{P,V}, \varepsilon) \quad (205)$$

Rovnice (205) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Vápenice nastane po příjezdu z výchozí zastávky Průmyslová zóna.

$$x_{P,V}(k+1) = \max(x_{P,V}(k) + l_9, x_{V,P}(k) + t_{V,P}) \quad (206)$$

Rovnice (206) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Průmyslová zóna nastane po příjezdu ze zastávky Vápenice a příjezdu z výchozí zastávky Průmyslová zóna.

$$x_{V,P}(k+1) = \max(x_{D,V}(k) + t_{D,V}, x_{N,V}(k) + t_{N,V}, x_{P,V}(k) + t_{P,N} + t_{N,V}) \quad (207)$$

Rovnice (207) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Vápenice nastane po příjezdu ze zastávky Domamyslice a Nemocnice a příjezdu z výchozí zastávky Průmyslová zóna.

$$x_{T,V}(k+1) = \max(x_{T,V}(k) + l_{16}, x_{V,T}(k) + t_{V,T}) \quad (208)$$

Rovnice (208) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Tesco nastane po příjezdu ze zastávky Vápenice a příjezdu z výchozí zastávky Tesco.

$$x_{V,T}(k+1) = \max(x_{D,V}(k) + t_{D,V}, x_{T,V}(k) + t_{T,D} + t_{D,V}) \quad (209)$$

Rovnice (209) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Vápenice nastane po příjezdu ze zastávky Domamyslice a příjezdu z výchozí zastávky Tesco.

Stanovení odjezdů spojů ze zastávek na linkách 9 a 16

Na základě hodnot vstupních údajů dosazených do rovnic Max-plus algebry, které zajišťují přestup mezi linkami 9 a 16 na zastávce Vápenice, byla sestavena matice A .

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} D,V & V,D & N,V & V,N & P,V & V,P & T,V & V,T \end{matrix} \\ \begin{matrix} D,V \\ V,D \\ N,V \\ V,N \\ P,V \\ V,P \\ T,V \\ V,T \end{matrix} & \begin{pmatrix} \varepsilon & 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 27 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 17 & \varepsilon & 12 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10 & 27 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 17 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 54 & 21 & \varepsilon & \varepsilon \\ 10 & \varepsilon & 6 & \varepsilon & 33 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 54 & 17 \\ 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 37 & \varepsilon \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (210)$$

```
-->[l,v,d] = maxplusmaxalgot(A)
```

```
-->p=54;
```

```
-->[X]=maxplussys(A,x0,p)
```

1052	1107	1161	1215	1260	1322	1377	1421	1485	1520	1502	1647	1701	1755	1800	1862
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

column 36 to 51

column 52 to 55

2781.	2835.	2889.	2943.
2771.	2825.	2879.	2933.
2781.	2835.	2889.	2943.
2771.	2825.	2879.	2933.
2808.	2862.	2916.	2970.
2787.	2841.	2895.	2949.
2808.	2862.	2916.	2970.
2791.	2845.	2899.	2953.

Srovnání výsledků

Relace	Doba přestupu [min]			
	Varianta 1	Varianta 2	Varianta 3	Varianta 4
Domamyslice – Vápenice – Prům. zóna	5	20	20	5
Prům. zóna – Vápenice – Domamyslice	4	12	12	4

Tab. č. 8: Srovnání výsledků jednotlivých variant

Domamyslice – Vápenice – Prům. zóna			
Relace	Příjezd	Relace	Odjezd
Domamyslice-Vápenice	5:10	Vápenice – Prům. zóna	5:15
	6:04		6:09
	6:58		7:03
	7:52		7:57
	8:46		8:51
	9:40		9:45
	10:34		10:39
	11:28		11:33
	12:22		12:27
	13:16		13:21
	14:10		14:15
	15:04		15:09
	15:58		16:03
	16:52		16:57

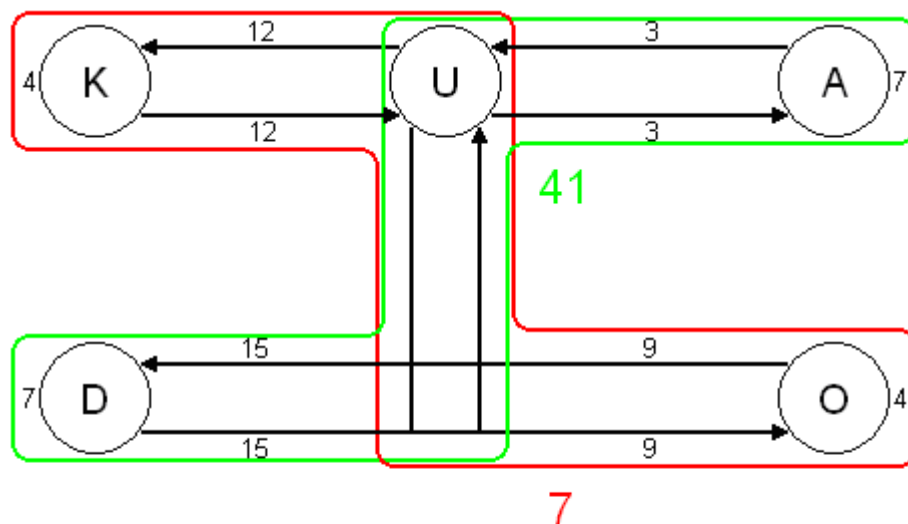
Tab. č. 9: Příklad jízdního řádu pro variantu 1 ve směru Domamyslice – Prům. zóna

Prům. zóna – Vápenice – Domamyslice			
Relace	Příjezd	Relace	Odjezd
Prům. zóna – Vápenice	5:35	Vápenice-Domamyslice	5:39
	6:29		6:33
	7:23		7:27
	8:17		8:21
	9:11		9:15
	10:05		10:09
	10:59		11:03
	11:53		11:57
	12:47		12:51
	13:41		13:45
	14:35		14:39
	15:29		15:33
	16:23		16:27
	17:17		17:21

Tab. č. 10: Příklad jízdního řádu pro variantu 1 ve směru Prům. zóna – Domamyslice

6.6 Experiment č. 3

V experimentu č. 3 se jedná o zajištění přestupu mezi linkami 7 a 41 na zastávce Újezd (obr. č. 26) nahrazující přímé spojení v relaci aut. st. – OP původně obsluhované linkou 74. Přestup je zajištěn systémem rovnic max-plus algebry, který zohledňuje příjezdy vozidel MHD ze sousedních zastávek. V daném případě množina zastávek $Z=\{A,D,K,O,U\}$ obsahuje konečné zastávky A, D, K, O a přestupní zastávku U.



Legenda:
A - Autobusová stanice
D - Domamyslice
K - Krasice
O - Oděvní Podnik
Ú - Újezd

Obr. č. 26: Fragment dopravní sítě MHD Prostějov obsahující linky 7 a 41

Dalšími potřebnými vstupními údaji v případě experimentu č. 3 jsou:

- provozní parametry linek 7 a 41 (viz. tab. č. 11),
- jízdní doby mezi zastávkami na linkách 7 a 41 (viz. tab. č. 12),
- požadavek na přestup na zastávce Újezd v relaci aut. stanice – OP,
- požadavek na přestup na zastávce Újezd v relaci OP – aut. stanice,
- každá linka je obsluhována jedním vozidlem.

Linka	Doba spoje [min]	Doba zdržení na konečné [min]	Doba linky [min]	Oběžná doba [min]	Linkový interval [min]
7	21	4	25	50	50
41	18	7	25	50	50

Tab. č. 11: Provozní parametry linek 7 a 41

Úsek mezi i-tou a j-tou zastávkou	Jízdní doba mezi i-tou a j-tou zastávkou [min]	Úsek mezi i-tou a j-tou zastávkou	Jízdní doba mezi i-tou a j-tou zastávkou [min]
A,U	3	K,U	12
U,A	3	U,K	12
D,U	15	O,U	9
U,D	15	U,O	9

Tab. č. 12: Jízdní doby mezi zastávkami na linkách 7 a 41

Varianty modelu podle kombinace výchozích zastávek jsou následující:

- Varianta č. 1 - výchozí zastávkou na lince 7 je zastávka Krasice,
- výchozí zastávkou na lince 41 je zastávka aut. stanice,
- Varianta č. 2 - výchozí zastávkou na lince 7 je zastávka OP,
- výchozí zastávkou na lince 41 je zastávka aut. stanice,
- Varianta č. 3 - výchozí zastávkou na lince 7 je zastávka Krasice,
- výchozí zastávkou na lince 41 je zastávka Domamyslice,
- Varianta č. 4 - výchozí zastávkou na lince 7 je zastávka OP,
- výchozí zastávkou na lince 41 je zastávka Domamyslice,

6.6.1 Systém rovnic varianty č. 1 zajišťující přestup mezi linkami 7 a 41

- výchozí zastávky autobusová stanice a Krasice

$$x_{A,U}(k+1) = \max(x_{A,U}(k) + l_{41}, x_{U,A}(k) + t_{U,A}) \quad (211)$$

Rovnice (211) zajišťuje, že odjezd ze zastávky autobusová stanice nastane po příjezdu ze zastávky Újezd a příjezdu z výchozí zastávky autobusová stanice.

$$x_{U,A}(k+1) = \max(x_{A,U}(k) + t_{A,D} + t_{D,U}, x_{D,U}(k) + t_{D,U}, x_{O,U}(k) + t_{O,U}) \quad (212)$$

Rovnice (212) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Újezd nastane po příjezdu ze zastávky Domamyslice a Oděvní podnik a příjezdu z výchozí zastávky autobusová stanice.

$$x_{D,U}(k+1) = \max(x_{A,U}(k) + t_{A,D}, x_{U,D}(k) + t_{U,D}) \quad (213)$$

Rovnice (213) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Domamyslice nastane po příjezdu ze zastávky Újezd a příjezdu z výchozí zastávky autobusová stanice.

$$x_{U,D}(k+1) = \max(x_{A,U}(k) + t_{A,U}, x_{D,U}(k) + t_{D,A} + t_{A,U}) \quad (214)$$

Rovnice (214) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Újezd nastane po příjezdu ze zastávky Domamyslice a příjezdu z výchozí zastávky autobusová stanice.

$$x_{K,U}(k+1) = \max(x_{K,U}(k) + l_7, x_{U,K}(k) + t_{U,K}) \quad (215)$$

Rovnice (215) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Krasice nastane po příjezdu ze zastávky Újezd a příjezdu z výchozí zastávky Krasice.

$$x_{U,K}(k+1) = \max(x_{K,U}(k) + t_{K,O} + t_{O,U}, x_{O,U}(k) + t_{O,U}) \quad (216)$$

Rovnice (216) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Újezd nastane po příjezdu ze zastávky Oděvní podnik a příjezdu z výchozí zastávky Krasice.

$$x_{O,U}(k+1) = \max(x_{K,U}(k) + t_{K,O}, x_{U,O}(k) + t_{U,O}) \quad (217)$$

Rovnice (217) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Oděvní podnik nastane po příjezdu ze zastávky Újezd a příjezdu z výchozí zastávky Krasice.

$$x_{U,O}(k+1) = \max(x_{A,U}(k) + t_{A,U}, x_{K,U}(k) + t_{K,U}) \quad (218)$$

Rovnice (218) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Újezd nastane po příjezdu ze zastávky autobusová stanice a příjezdu z výchozí zastávky Krasice.

Stanovení odjezdů spojů ze zastávek na linkách 7 a 41

Na základě hodnot vstupních údajů dosazených do rovnic max-plus algebry, které zajišťují přestup mezi linkami 7 a 41 na zastávce Újezd, byla sestavena matice A .

$$\begin{matrix}
 & A,U & U,A & D,U & U,D & K,U & U,K & O,U & U,O \\
 \begin{matrix} A,U \\ U,A \\ D,U \\ A=U,D \\ K,U \\ U,K \\ O,U \\ U,O \end{matrix} & \begin{pmatrix} 50 & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 40 & \varepsilon & 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9 & \varepsilon \\ 25 & \varepsilon & \varepsilon & 22 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 50 & 16 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & \varepsilon & 9 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 25 & \varepsilon & \varepsilon & 13 \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 12 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}
 \end{matrix} \quad (219)$$

Následně byl pro sestavenou matici A (219) zjišťován vlastní vektor a vlastní číslo. Vlastní vektor byl zjišťován za účelem stanovení počátečních odjezdů ze zastávek na linkách 7 a 41 a vlastní číslo bylo zjišťováno za účelem stanovení odjezdů ze zastávek na linkách 7 a 41, při kterých bude opět dosaženo počátečních odjezdů.

```

A=[50 10 -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf;
40 -%inf 15 -%inf -%inf -%inf 9 -%inf;
25 -%inf -%inf 22 -%inf -%inf -%inf -%inf;
3 -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf;
-%inf -%inf -%inf -%inf 50 16 -%inf -%inf;
-%inf -%inf -%inf -%inf 34 -%inf 9 -%inf;
-%inf -%inf -%inf -%inf 25 -%inf -%inf 13;
3 -%inf -%inf -%inf 12 -%inf -%inf -%inf];

```

```

-->s=maxplusscg(A)
-->[l,v,d] = maxplusmaxalgol(A)
-->x0=[50;40;25;3;50;34;25;12];
-->p=50;
-->[X]=maxplussys(A,x0,p)

```

```

50. 100. 150. 200. 250. 300. 350. 400. 450. 500. 550. 600. 650. 700. 750. 800. 850. 900. 950.
40. 90. 140. 190. 240. 290. 340. 390. 440. 490. 540. 590. 640. 690. 740. 790. 840. 890. 940.
25. 75. 125. 175. 225. 275. 325. 375. 425. 475. 525. 575. 625. 675. 725. 775. 825. 875. 925.
3. 53. 103. 153. 203. 253. 303. 353. 403. 453. 503. 553. 603. 653. 703. 753. 803. 853. 903.
50. 100. 150. 200. 250. 300. 350. 400. 450. 500. 550. 600. 650. 700. 750. 800. 850. 900. 950.
34. 84. 134. 184. 234. 284. 334. 384. 434. 484. 534. 584. 634. 684. 734. 784. 834. 884. 934.
25. 75. 125. 175. 225. 275. 325. 375. 425. 475. 525. 575. 625. 675. 725. 775. 825. 875. 925.
12. 62. 112. 162. 212. 262. 312. 362. 412. 462. 512. 562. 612. 662. 712. 762. 812. 862. 912.
column 20 to 35
1000. 1050. 1100. 1150. 1200. 1250. 1300. 1350. 1400. 1450. 1500. 1550. 1600. 1650. 1700. 1750.
990. 1040. 1090. 1140. 1190. 1240. 1290. 1340. 1390. 1440. 1490. 1540. 1590. 1640. 1690. 1740.
975. 1025. 1075. 1125. 1175. 1225. 1275. 1325. 1375. 1425. 1475. 1525. 1575. 1625. 1675. 1725.
953. 1003. 1053. 1103. 1153. 1203. 1253. 1303. 1353. 1403. 1453. 1503. 1553. 1603. 1653. 1703.
1000. 1050. 1100. 1150. 1200. 1250. 1300. 1350. 1400. 1450. 1500. 1550. 1600. 1650. 1700. 1750.
984. 1034. 1084. 1134. 1184. 1234. 1284. 1334. 1384. 1434. 1484. 1534. 1584. 1634. 1684. 1734.
975. 1025. 1075. 1125. 1175. 1225. 1275. 1325. 1375. 1425. 1475. 1525. 1575. 1625. 1675. 1725.
962. 1012. 1062. 1112. 1162. 1212. 1262. 1312. 1362. 1412. 1462. 1512. 1562. 1612. 1662. 1712.

```


column 36 to 51															
1800.	1850.	1900.	1950.	2000.	2050.	2100.	2150.	2200.	2250.	2300.	2350.	2400.	2450.	2500.	2550.
1790.	1840.	1890.	1940.	1990.	2040.	2090.	2140.	2190.	2240.	2290.	2340.	2390.	2440.	2490.	2540.
1775.	1825.	1875.	1925.	1975.	2025.	2075.	2125.	2175.	2225.	2275.	2325.	2375.	2425.	2475.	2525.
1753.	1803.	1853.	1903.	1953.	2003.	2053.	2103.	2153.	2203.	2253.	2303.	2353.	2403.	2453.	2503.
1800.	1850.	1900.	1950.	2000.	2050.	2100.	2150.	2200.	2250.	2300.	2350.	2400.	2450.	2500.	2550.
1784.	1834.	1884.	1934.	1984.	2034.	2084.	2134.	2184.	2234.	2284.	2334.	2384.	2434.	2484.	2534.
1775.	1825.	1875.	1925.	1975.	2025.	2075.	2125.	2175.	2225.	2275.	2325.	2375.	2425.	2475.	2525.
1762.	1812.	1862.	1912.	1962.	2012.	2062.	2112.	2162.	2212.	2262.	2312.	2362.	2412.	2462.	2512.

6.6.2 Systém rovnic varianty č. 2 zajišťující přestup mezi linkami 7 a 41

- výchozí zastávky autobusová stanice a OP

$$x_{A,U}(k+1) = \max(x_{A,U}(k) + l_{41}, x_{U,A}(k) + t_{U,A}) \quad (220)$$

Rovnice (220) zajišťuje, že odjezd ze zastávky autobusová stanice nastane po příjezdu ze zastávky Újezd a příjezdu z výchozí zastávky autobusová stanice.

$$x_{U,A}(k+1) = \max(x_{A,U}(k) + t_{A,D} + t_{D,U}, x_{D,U}(k) + t_{D,U}, x_{O,U}(k) + t_{O,U}) \quad (221)$$

Rovnice (221) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Újezd nastane po příjezdu ze zastávky Domamyslice a Oděvní podnik a příjezdu z výchozí zastávky autobusová stanice.

$$x_{D,U}(k+1) = \max(x_{A,U}(k) + t_{A,D}, x_{U,D}(k) + t_{U,D}) \quad (223)$$

Rovnice (223) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Domamyslice nastane po příjezdu ze zastávky Újezd a příjezdu z výchozí zastávky autobusová stanice.

$$x_{U,D}(k+1) = \max(x_{A,U}(k) + t_{A,U}, x_{D,U}(k) + t_{D,A} + t_{A,U}) \quad (224)$$

Rovnice (224) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Újezd nastane po příjezdu ze zastávky Domamyslice a příjezdu z výchozí zastávky autobusová stanice.

$$x_{K,U}(k+1) = \max(x_{U,K}(k) + t_{U,K}, x_{O,U}(k) + t_{O,K}) \quad (225)$$

Rovnice (225) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Krasice nastane po příjezdu ze zastávky Újezd a příjezdu z výchozí zastávky Oděvní podnik.

$$x_{U,K}(k+1) = \max(x_{K,U}(k) + t_{K,O} + t_{O,U}, x_{O,U}(k) + t_{O,U}) \quad (226)$$

Rovnice (226) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Újezd nastane po příjezdu ze zastávky Krasice a příjezdu z výchozí zastávky Oděvní podnik.

$$x_{O,U}(k+1) = \max(x_{O,U}(k) + l_7, x_{U,O}(k) + t_{U,O}) \quad (227)$$

Rovnice (227) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Oděvní podnik nastane po příjezdu ze zastávky Újezd a příjezdu z výchozí zastávky Oděvní podnik.

$$x_{U,O}(k+1) = \max(x_{A,U}(k) + t_{A,U}, x_{K,U}(k) + t_{K,U}, x_{O,U}(k) + t_{O,K} + t_{K,U}) \quad (228)$$

Rovnice (228) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Újezd nastane po příjezdu ze zastávky autobusová stanice a Krasice a příjezdu z výchozí zastávky Oděvní podnik.

Stanovení odjezdů spojů ze zastávek na linkách 7 a 41

Na základě hodnot vstupních údajů dosazených do rovnic max-plus algebry, které zajišťují přestup mezi linkami 7 a 41 na zastávce Újezd, byla sestavena matice A .

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} A,U & U,A & D,U & U,D & K,U & U,K & O,U & U,O \end{matrix} \\ \begin{matrix} A,U \\ U,A \\ D,U \\ A=U,D \\ K,U \\ U,K \\ O,U \\ U,O \end{matrix} & \begin{pmatrix} 50 & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 40 & \varepsilon & 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9 & \varepsilon \\ 25 & \varepsilon & \varepsilon & 22 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 16 & 25 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 50 & 13 \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 12 & \varepsilon & 37 & \varepsilon \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (229)$$

Následně byl pro sestavenou matici A (229) zjišťován vlastní vektor a vlastní číslo. Vlastní vektor byl zjišťován za účelem stanovení počátečních odjezdů ze zastávek na linkách 7 a 41 a vlastní číslo bylo zjišťováno za účelem stanovení odjezdů ze zastávek na linkách 7 a 41, při kterých bude opět dosaženo počátečních odjezdů.

```
A=[50 10 -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf;
40 -%inf 15 -%inf -%inf -%inf 9 -%inf;
25 -%inf -%inf 22 -%inf -%inf -%inf -%inf;
3 -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf;
-%inf -%inf -%inf -%inf -%inf 16 25 -%inf;
-%inf -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf 9 -%inf;
-%inf -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf 50 13;
3 -%inf -%inf -%inf 12 -%inf 37 -%inf];
```

```

-->s=maxplusscg(A)
-->[l,v,d] = maxplusmaxalgol(A)
-->x0=[50;40;25;3;25;9;50;37];
-->p=50;
-->[X]=maxplussys(A,x0,p)

```

```

50. 100. 150. 200. 250. 300. 350. 400. 450. 500. 550. 600. 650. 700. 750. 800. 850. 900. 950.
40. 90. 140. 190. 240. 290. 340. 390. 440. 490. 540. 590. 640. 690. 740. 790. 840. 890. 940.
25. 75. 125. 175. 225. 275. 325. 375. 425. 475. 525. 575. 625. 675. 725. 775. 825. 875. 925.
3. 53. 103. 153. 203. 253. 303. 353. 403. 453. 503. 553. 603. 653. 703. 753. 803. 853. 903.
25. 75. 125. 175. 225. 275. 325. 375. 425. 475. 525. 575. 625. 675. 725. 775. 825. 875. 925.
9. 59. 109. 159. 209. 259. 309. 359. 409. 459. 509. 559. 609. 659. 709. 759. 809. 859. 909.
50. 100. 150. 200. 250. 300. 350. 400. 450. 500. 550. 600. 650. 700. 750. 800. 850. 900. 950.
37. 87. 137. 187. 237. 287. 337. 387. 437. 487. 537. 587. 637. 687. 737. 787. 837. 887. 937.
column 20 to 35
1000. 1050. 1100. 1150. 1200. 1250. 1300. 1350. 1400. 1450. 1500. 1550. 1600. 1650. 1700. 1750.
990. 1040. 1090. 1140. 1190. 1240. 1290. 1340. 1390. 1440. 1490. 1540. 1590. 1640. 1690. 1740.
975. 1025. 1075. 1125. 1175. 1225. 1275. 1325. 1375. 1425. 1475. 1525. 1575. 1625. 1675. 1725.
953. 1003. 1053. 1103. 1153. 1203. 1253. 1303. 1353. 1403. 1453. 1503. 1553. 1603. 1653. 1703.
975. 1025. 1075. 1125. 1175. 1225. 1275. 1325. 1375. 1425. 1475. 1525. 1575. 1625. 1675. 1725.
959. 1009. 1059. 1109. 1159. 1209. 1259. 1309. 1359. 1409. 1459. 1509. 1559. 1609. 1659. 1709.
1000. 1050. 1100. 1150. 1200. 1250. 1300. 1350. 1400. 1450. 1500. 1550. 1600. 1650. 1700. 1750.
987. 1037. 1087. 1137. 1187. 1237. 1287. 1337. 1387. 1437. 1487. 1537. 1587. 1637. 1687. 1737.
column 36 to 51
1800. 1850. 1900. 1950. 2000. 2050. 2100. 2150. 2200. 2250. 2300. 2350. 2400. 2450. 2500. 2550.
1790. 1840. 1890. 1940. 1990. 2040. 2090. 2140. 2190. 2240. 2290. 2340. 2390. 2440. 2490. 2540.
1775. 1825. 1875. 1925. 1975. 2025. 2075. 2125. 2175. 2225. 2275. 2325. 2375. 2425. 2475. 2525.
1753. 1803. 1853. 1903. 1953. 2003. 2053. 2103. 2153. 2203. 2253. 2303. 2353. 2403. 2453. 2503.
1775. 1825. 1875. 1925. 1975. 2025. 2075. 2125. 2175. 2225. 2275. 2325. 2375. 2425. 2475. 2525.
1759. 1809. 1859. 1909. 1959. 2009. 2059. 2109. 2159. 2209. 2259. 2309. 2359. 2409. 2459. 2509.
1800. 1850. 1900. 1950. 2000. 2050. 2100. 2150. 2200. 2250. 2300. 2350. 2400. 2450. 2500. 2550.
1787. 1837. 1887. 1937. 1987. 2037. 2087. 2137. 2187. 2237. 2287. 2337. 2387. 2437. 2487. 2537.

```

6.6.3 Systém rovnic varianty č. 3 zajišťující přestup mezi linkami 7 a 41

- výchozí zastávky Domamyslice a Krasice

$$x_{A,U}(k+1) = \max(x_{U,A}(k) + t_{U,A}, x_{D,U}(k) + t_{D,A}) \quad (230)$$

Rovnice (230) zajišťuje, že odjezd ze zastávky autobusová stanice nastane po příjezdu ze zastávky Újezd a příjezdu z výchozí zastávky Domamyslice.

$$x_{U,A}(k+1) = \max(x_{D,U}(k) + t_{D,U}, x_{O,U}(k) + t_{O,U}) \quad (231)$$

Rovnice (231) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Újezd nastane po příjezdu ze zastávky Oděvní podnik a příjezdu z výchozí zastávky Domamyslice.

$$x_{D,U}(k+1) = \max(x_{D,U}(k) + l_{41}, x_{U,D}(k) + t_{U,D}) \quad (232)$$

Rovnice (232) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Domamyslice nastane po příjezdu ze zastávky Újezd a příjezdu z výchozí zastávky Domamyslice.

$$x_{U,D}(k+1) = \max(x_{A,U}(k) + t_{A,U}, x_{D,U}(k) + t_{D,A} + t_{A,U}) \quad (233)$$

Rovnice (233) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Újezd nastane po příjezdu ze zastávky autobusová stanice a příjezdu z výchozí zastávky Domamyslice.

$$x_{K,U}(k+1) = \max(x_{K,U}(k) + l_7, x_{U,K}(k) + t_{U,K}) \quad (234)$$

Rovnice (234) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Krasice nastane po příjezdu ze zastávky Újezd a příjezdu z výchozí zastávky Krasice.

$$x_{U,K}(k+1) = \max(x_{K,U}(k) + t_{K,O} + t_{O,U}, x_{O,U}(k) + t_{O,U}) \quad (235)$$

Rovnice (235) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Újezd nastane po příjezdu ze zastávky Oděvní podnik a příjezdu z výchozí zastávky Krasice.

$$x_{O,U}(k+1) = \max(x_{K,U}(k) + t_{K,O}, x_{U,O}(k) + t_{U,O}) \quad (236)$$

Rovnice (236) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Oděvní podnik nastane po příjezdu ze zastávky Újezd a příjezdu z výchozí zastávky Krasice.

$$x_{U,O}(k+1) = \max(x_{A,U}(k) + t_{A,U}, x_{K,U}(k) + t_{K,U}) \quad (237)$$

Rovnice (237) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Újezd nastane po příjezdu ze zastávky autobusová stanice a příjezdu z výchozí zastávky Krasice.

Stanovení odjezdů spojů ze zastávek na linkách 7 a 41

Na základě hodnot vstupních údajů dosazených do rovnic max-plus algebry, které zajišťují přestup mezi linkami 7 a 41 na zastávce Újezd, byla sestavena matice A .

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} A,U & U,A & D,U & U,D & K,U & U,K & O,U & U,O \end{matrix} \\ \begin{matrix} A,U \\ U,A \\ D,U \\ A=U,D \\ K,U \\ U,K \\ O,U \\ U,O \end{matrix} & \begin{pmatrix} \varepsilon & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 50 & 22 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & 28 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 50 & 16 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & \varepsilon & 9 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 25 & \varepsilon & \varepsilon & 13 \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 12 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (238)$$

Následně byl pro sestavenou matici A (238) zjišťován vlastní vektor a vlastní číslo. Vlastní vektor byl zjišťován za účelem stanovení počátečních odjezdů ze zastávek na linkách 7 a 41 a vlastní číslo bylo zjišťováno za účelem stanovení odjezdů ze zastávek na linkách 7 a 41, při kterých bude opět dosaženo počátečních odjezdů.

```
A=[-%inf 10 25 -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf;
-%inf -%inf 15 -%inf -%inf -%inf 9 -%inf;
-%inf -%inf 50 22 -%inf -%inf -%inf -%inf;
3 -%inf 28 -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf;
-%inf -%inf -%inf -%inf 50 16 -%inf -%inf;
-%inf -%inf -%inf -%inf 34 -%inf 9 -%inf;
-%inf -%inf -%inf -%inf 25 -%inf -%inf 13;
3 -%inf -%inf -%inf 12 -%inf -%inf -%inf];
```

```
-->s=maxplusscg(A)
-->[l,v,d] = maxplusmaxalgol(A)
-->x0=[25;15;50;28;50;34;25;12];
-->p=50;
-->[X]=maxplussys(A,x0,p)
```

25.	75.	125.	175.	225.	275.	325.	375.	425.	475.	525.	575.	625.	675.	725.	775.	825.	875.	925.
15.	65.	115.	165.	215.	265.	315.	365.	415.	465.	515.	565.	615.	665.	715.	765.	815.	865.	915.
50.	100.	150.	200.	250.	300.	350.	400.	450.	500.	550.	600.	650.	700.	750.	800.	850.	900.	950.
28.	78.	128.	178.	228.	278.	328.	378.	428.	478.	528.	578.	628.	678.	728.	778.	828.	878.	928.
50.	100.	150.	200.	250.	300.	350.	400.	450.	500.	550.	600.	650.	700.	750.	800.	850.	900.	950.
34.	84.	134.	184.	234.	284.	334.	384.	434.	484.	534.	584.	634.	684.	734.	784.	834.	884.	934.
25.	75.	125.	175.	225.	275.	325.	375.	425.	475.	525.	575.	625.	675.	725.	775.	825.	875.	925.
12.	62.	112.	162.	212.	262.	312.	362.	412.	462.	512.	562.	612.	662.	712.	762.	812.	862.	912.
column 20 to 35																		
975.	1025.	1075.	1125.	1175.	1225.	1275.	1325.	1375.	1425.	1475.	1525.	1575.	1625.	1675.	1725.			
965.	1015.	1065.	1115.	1165.	1215.	1265.	1315.	1365.	1415.	1465.	1515.	1565.	1615.	1665.	1715.			
1000.	1050.	1100.	1150.	1200.	1250.	1300.	1350.	1400.	1450.	1500.	1550.	1600.	1650.	1700.	1750.			
978.	1028.	1078.	1128.	1178.	1228.	1278.	1328.	1378.	1428.	1478.	1528.	1578.	1628.	1678.	1728.			
1000.	1050.	1100.	1150.	1200.	1250.	1300.	1350.	1400.	1450.	1500.	1550.	1600.	1650.	1700.	1750.			
984.	1034.	1084.	1134.	1184.	1234.	1284.	1334.	1384.	1434.	1484.	1534.	1584.	1634.	1684.	1734.			
975.	1025.	1075.	1125.	1175.	1225.	1275.	1325.	1375.	1425.	1475.	1525.	1575.	1625.	1675.	1725.			
962.	1012.	1062.	1112.	1162.	1212.	1262.	1312.	1362.	1412.	1462.	1512.	1562.	1612.	1662.	1712.			
column 36 to 51																		
1775.	1825.	1875.	1925.	1975.	2025.	2075.	2125.	2175.	2225.	2275.	2325.	2375.	2425.	2475.	2525.			
1765.	1815.	1865.	1915.	1965.	2015.	2065.	2115.	2165.	2215.	2265.	2315.	2365.	2415.	2465.	2515.			
1800.	1850.	1900.	1950.	2000.	2050.	2100.	2150.	2200.	2250.	2300.	2350.	2400.	2450.	2500.	2550.			
1778.	1828.	1878.	1928.	1978.	2028.	2078.	2128.	2178.	2228.	2278.	2328.	2378.	2428.	2478.	2528.			
1800.	1850.	1900.	1950.	2000.	2050.	2100.	2150.	2200.	2250.	2300.	2350.	2400.	2450.	2500.	2550.			
1784.	1834.	1884.	1934.	1984.	2034.	2084.	2134.	2184.	2234.	2284.	2334.	2384.	2434.	2484.	2534.			
1775.	1825.	1875.	1925.	1975.	2025.	2075.	2125.	2175.	2225.	2275.	2325.	2375.	2425.	2475.	2525.			
1762.	1812.	1862.	1912.	1962.	2012.	2062.	2112.	2162.	2212.	2262.	2312.	2362.	2412.	2462.	2512.			

6.6.4 Systém rovnic varianty č. 4 zajišťující přestup mezi linkami 7 a 41

- výchozí zastávky Domamyslice a OP

$$x_{A,U}(k+1) = \max(x_{U,A}(k) + t_{U,A}, x_{D,U}(k) + t_{D,A}) \quad (239)$$

Rovnice (239) zajišťuje, že odjezd ze zastávky autobusová stanice nastane po příjezdu ze zastávky Újezd a příjezdu z výchozí zastávky Domamyslice.

$$x_{U,A}(k+1) = \max(x_{D,U}(k) + t_{D,U}, x_{O,U}(k) + t_{O,U}) \quad (240)$$

Rovnice (240) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Újezd nastane po příjezdu ze zastávky Oděvní podnik a příjezdu z výchozí zastávky Domamyslice.

$$x_{D,U}(k+1) = \max(x_{D,U}(k) + l_{41}, x_{U,D}(k) + t_{U,D}) \quad (241)$$

Rovnice (241) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Domamyslice nastane po příjezdu ze zastávky Újezd a příjezdu z výchozí zastávky Domamyslice.

$$x_{U,D}(k+1) = \max(x_{A,U}(k) + t_{A,U}, x_{D,U}(k) + t_{D,A} + t_{A,U}) \quad (242)$$

Rovnice (242) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Újezd nastane po příjezdu ze zastávky autobusová stanice a příjezdu z výchozí zastávky Domamyslice.

$$x_{K,U}(k+1) = \max(x_{U,K}(k) + t_{U,K}, x_{O,U}(k) + t_{O,K}) \quad (243)$$

Rovnice (243) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Krasice nastane po příjezdu ze zastávky Újezd a příjezdu z výchozí zastávky Oděvní podnik.

$$x_{U,K}(k+1) = \max(x_{K,U}(k) + t_{K,O} + t_{O,U}, x_{O,U}(k) + t_{O,U}) \quad (244)$$

Rovnice (244) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Újezd nastane po příjezdu ze zastávky Krasice a příjezdu z výchozí zastávky Oděvní podnik.

$$x_{O,U}(k+1) = \max(x_{O,U}(k) + l_7, x_{U,O}(k) + t_{U,O}) \quad (245)$$

Rovnice (245) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Oděvní podnik nastane po příjezdu ze zastávky Újezd a příjezdu z výchozí zastávky Oděvní podnik.

$$x_{U,O}(k+1) = \max(x_{A,U}(k) + t_{A,U}, x_{K,U}(k) + t_{K,U}, x_{O,U}(k) + t_{O,K} + t_{K,U}) \quad (246)$$

Rovnice (246) zajišťuje, že odjezd ze zastávky Újezd nastane po příjezdu ze zastávky autobusová stanice a Krasice a příjezdu z výchozí zastávky Oděvní podnik.

Stanovení odjezdů spojů ze zastávek na linkách 7 a 41

Na základě hodnot vstupních údajů dosazených do rovnic max-plus algebry, které zajišťují přestup mezi linkami 7 a 41 na zastávce Újezd, byla sestavena matice A .

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} A,U & U,A & D,U & U,D & K,U & U,K & O,U & U,O \end{matrix} \\ \begin{matrix} A,U \\ U,A \\ D,U \\ A=U,D \\ K,U \\ U,K \\ O,U \\ U,O \end{matrix} & \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 25 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 50 & 22 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & 28 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 25 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 50 & 13 \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 12 & \varepsilon & 37 & \varepsilon \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (247)$$

Následně byl pro sestavenou matici A (247) zjišťován vlastní vektor a vlastní číslo. Vlastní vektor byl zjišťován za účelem stanovení počátečních odjezdů ze zastávek na linkách 7 a 41 a vlastní číslo bylo zjišťováno za účelem stanovení odjezdů ze zastávek na linkách 7 a 41, při kterých bude opět dosaženo počátečních odjezdů.

```
A=[-%inf 10 25 -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf;
-%inf -%inf 15 -%inf -%inf -%inf 9 -%inf;
-%inf -%inf 50 22 -%inf -%inf -%inf -%inf;
3 -%inf 28 -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf;
-%inf -%inf -%inf -%inf -%inf 16 25 -%inf;
-%inf -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf 9 -%inf;
-%inf -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf 50 13;
3 -%inf -%inf -%inf 12 -%inf 37 -%inf];
```

```
-->s=maxplusscg(A)
-->[l,v,d] = maxplusmaxalgol(A)
-->x0=[25;15;50;28;25;9;50;37];
-->p=50;
-->[X]=maxplussys(A,x0,p)
```

25.	75.	125.	175.	225.	275.	325.	375.	425.	475.	525.	575.	625.	675.	725.	775.	825.	875.	925.
15.	65.	115.	165.	215.	265.	315.	365.	415.	465.	515.	565.	615.	665.	715.	765.	815.	865.	915.
50.	100.	150.	200.	250.	300.	350.	400.	450.	500.	550.	600.	650.	700.	750.	800.	850.	900.	950.
28.	78.	128.	178.	228.	278.	328.	378.	428.	478.	528.	578.	628.	678.	728.	778.	828.	878.	928.
25.	75.	125.	175.	225.	275.	325.	375.	425.	475.	525.	575.	625.	675.	725.	775.	825.	875.	925.
9.	59.	109.	159.	209.	259.	309.	359.	409.	459.	509.	559.	609.	659.	709.	759.	809.	859.	909.
50.	100.	150.	200.	250.	300.	350.	400.	450.	500.	550.	600.	650.	700.	750.	800.	850.	900.	950.
37.	87.	137.	187.	237.	287.	337.	387.	437.	487.	537.	587.	637.	687.	737.	787.	837.	887.	937.
column 20 to 35																		
975.	1025.	1075.	1125.	1175.	1225.	1275.	1325.	1375.	1425.	1475.	1525.	1575.	1625.	1675.	1725.			
965.	1015.	1065.	1115.	1165.	1215.	1265.	1315.	1365.	1415.	1465.	1515.	1565.	1615.	1665.	1715.			
1000.	1050.	1100.	1150.	1200.	1250.	1300.	1350.	1400.	1450.	1500.	1550.	1600.	1650.	1700.	1750.			
978.	1028.	1078.	1128.	1178.	1228.	1278.	1328.	1378.	1428.	1478.	1528.	1578.	1628.	1678.	1728.			
975.	1025.	1075.	1125.	1175.	1225.	1275.	1325.	1375.	1425.	1475.	1525.	1575.	1625.	1675.	1725.			
959.	1009.	1059.	1109.	1159.	1209.	1259.	1309.	1359.	1409.	1459.	1509.	1559.	1609.	1659.	1709.			
1000.	1050.	1100.	1150.	1200.	1250.	1300.	1350.	1400.	1450.	1500.	1550.	1600.	1650.	1700.	1750.			
987.	1037.	1087.	1137.	1187.	1237.	1287.	1337.	1387.	1437.	1487.	1537.	1587.	1637.	1687.	1737.			
column 36 to 51																		
1775.	1825.	1875.	1925.	1975.	2025.	2075.	2125.	2175.	2225.	2275.	2325.	2375.	2425.	2475.	2525.			
1765.	1815.	1865.	1915.	1965.	2015.	2065.	2115.	2165.	2215.	2265.	2315.	2365.	2415.	2465.	2515.			
1800.	1850.	1900.	1950.	2000.	2050.	2100.	2150.	2200.	2250.	2300.	2350.	2400.	2450.	2500.	2550.			
1778.	1828.	1878.	1928.	1978.	2028.	2078.	2128.	2178.	2228.	2278.	2328.	2378.	2428.	2478.	2528.			
1775.	1825.	1875.	1925.	1975.	2025.	2075.	2125.	2175.	2225.	2275.	2325.	2375.	2425.	2475.	2525.			
1759.	1809.	1859.	1909.	1959.	2009.	2059.	2109.	2159.	2209.	2259.	2309.	2359.	2409.	2459.	2509.			
1800.	1850.	1900.	1950.	2000.	2050.	2100.	2150.	2200.	2250.	2300.	2350.	2400.	2450.	2500.	2550.			
1787.	1837.	1887.	1937.	1987.	2037.	2087.	2137.	2187.	2237.	2287.	2337.	2387.	2437.	2487.	2537.			

Srovnání výsledků

Relace	Doba přestupu [min]			
	Varianta 1	Varianta 2	Varianta 3	Varianta 4
aut. st. – Újezd – OP	9	38	38	9
OP – Újezd – aut. st.	6	33	33	6

Tab. č. 13: Srovnání výsledků jednotlivých variant

aut. st. – Újezd – OP			
Relace	Příjezd	Relace	Odjezd
aut. st. – Újezd	5:03	Újezd – OP	5:12
	5:53		6:02
	6:43		6:52
	7:33		7:42
	8:23		8:32
	9:13		9:22
	10:03		10:12
	10:53		11:02
	11:43		12:52
	12:33		13:42
	13:23		13:33
	14:13		14:22
	15:03		15:12
	15:53		16:02
	16:43		16:52
	17:33		17:42

Tab. č. 14: Příklad jízdního řádu pro variantu 1 ve směru aut. st. – OP

OP – Újezd – aut. st.			
Relace	Příjezd	Relace	Odjezd
OP – Újezd	5:34	Újezd – aut. st.	5:40
	6:24		6:30
	7:14		7:20
	8:04		8:10
	8:54		9:00
	9:44		9:50
	10:34		10:40
	11:24		11:30
	12:14		12:20
	13:04		13:10
	13:54		14:00
	14:44		14:50
	15:34		15:40
	16:24		16:30
	17:14		17:20

Tab. č. 15: Příklad jízdního řádu pro variantu 1 ve směru OP – aut. st.

7 POUŽITÉ SOFTWAREVÉ NÁSTROJE

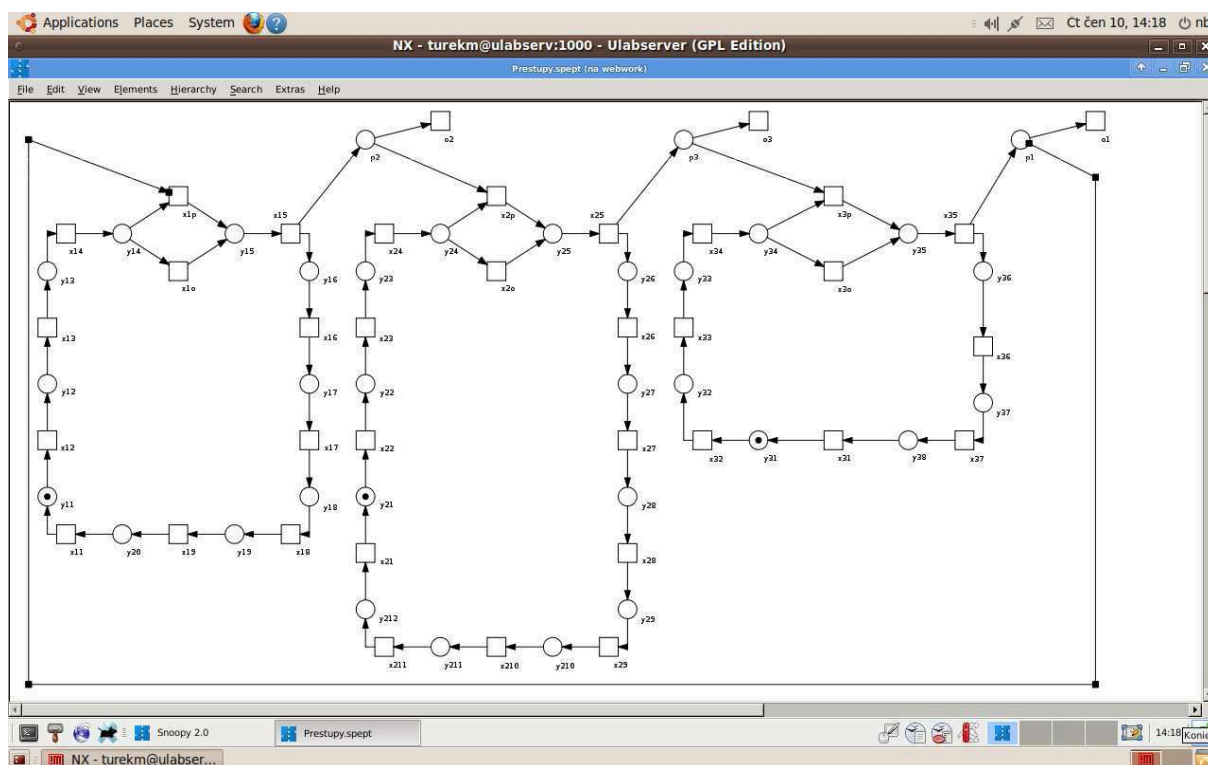
Provedené počítačové experimenty byly vykonány pomocí programových nástrojů Snoopy, Pipe2 a Scilab.

7.1 Softwarové nástroje pro sestavení Petriho sítí

Při vytváření Petriho sítě a následnou simulaci je nutné využít specializovaný software. V následující části budou popsány specializované software Snoopy a Pipe2, protože byly použity k řešení koordinace linek MHD Petriho sítěmi.

7.1.1 Software Snoopy

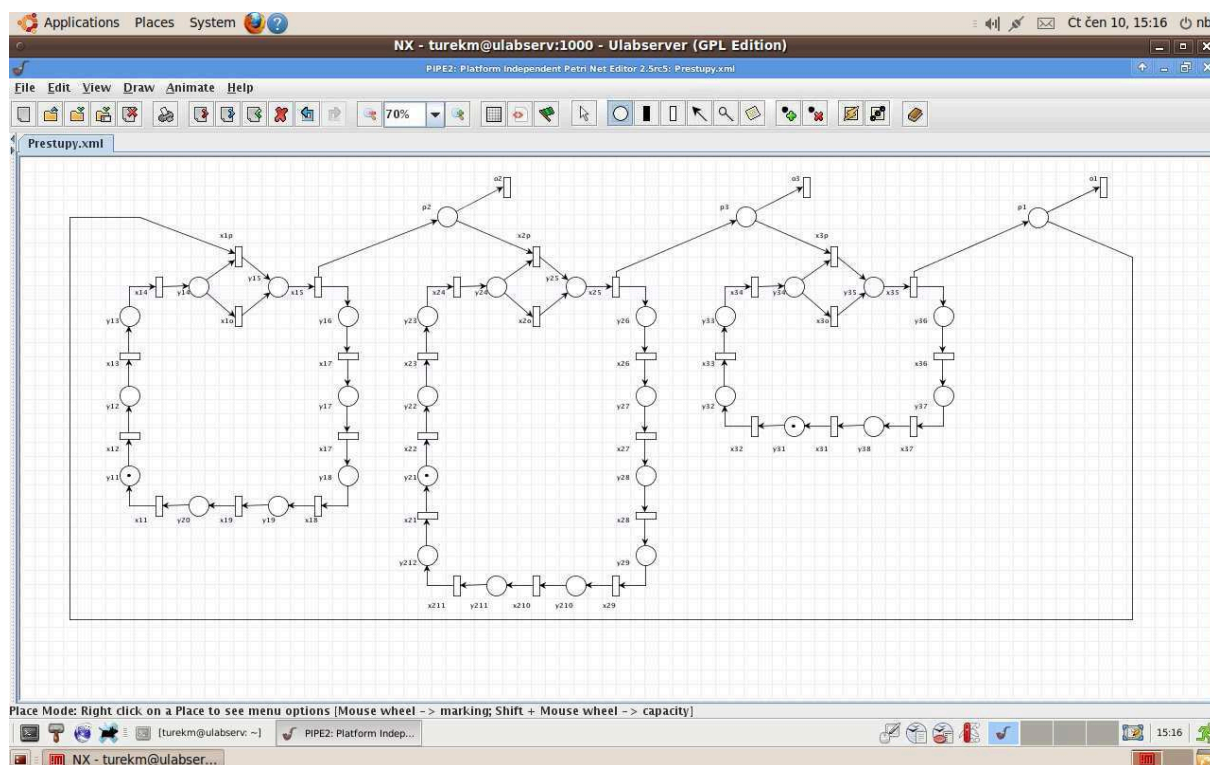
Spuštěním software Snoopy [25] se zobrazí kromě základního okna také nabídka Petriho sítí a po zvolení zamýšlené Petriho sítě se zobrazí obrazovka obsahující menu a pracovní prostor. V pracovním prostoru (viz. obr. 27) se postupně vytváří Petriho síť prostřednictvím položek, které se nacházejí v menu. Kromě sestavení prvků Petriho sítě je možné definovat příslušné parametry, u každého místa lze definovat název, značení, komentář a grafickou podobu, u každého přechodu lze definovat název, komentář a grafickou podobu, pro každou hranu lze definovat násobnost, komentář a grafickou podobu. Prostřednictvím položky Start Anim-mode, která je součástí menu, se v pracovním prostoru spouští simulace sestavené Petriho sítě. V rámci simulace se po hranách přesunují červeno zbarvené tokeny a mění se počty tokenů v příslušných místech.



Obr. č. 27: Pracovní plocha v software Snoopy

7.1.2 Software Pipe2

Při spuštění software Pipe2 [23] se zobrazí obrazovka obsahující menu, pracovní prostor a rozšířenou analýzu Petriho sítí. K vytvoření Petriho sítě slouží pracovní prostor (viz. obr. 28), do kterého se prostřednictvím položek z menu vkládají jednotlivé prvky Petriho sítě. V případě, že se prvky Petriho sítě nacházejí v pracovním prostoru je možné definovat jejich parametry, u každého místa lze definovat název, značení a kapacitu, u každého přechodu lze definovat název, sazbu a časování, pro každou hranu lze definovat násobnost. Prostřednictvím položky Animate, která je součástí menu se v pracovním prostoru spouští simulace sestavené Petriho sítě. Při simulaci se mění počty tokenů v příslušných místech a nedochází k viditelnému přesunu tokenů po hranách.



Obr. č. 28: Pracovní plocha v software Pipe2

7.2 Softwarové nástroje pro max-plus algebru

K řešení rozsáhlejších modelů nejen v oblasti max-plus algebry je vždy nutné využít dostupný software, prostřednictvím kterého je možné získat vyhodnocení řešené problematiky. Pro zpracování rovnice max-plus algebry byl francouzskými výzkumnými institucemi INRIA (The French National Institute for Research in Computer Science and Control) a ENPC (École Nationale des Ponts et Chaussées) vytvořen v roce 1990 vědecký program pro numerické výpočty s názvem Scilab [24].

Při spuštění programu Scilab se zobrazí hlavní pracovní okno (obr. č. 29) obsahující menu, ikony a pracovní plochu. Menu a ikony slouží k obsluze vytvářených, resp. již vytvořených souborů v programu Scilab, např. otevírání a ukládání souborů prostřednictvím záložky *File*. Pracovní plocha slouží k řešení konkrétních příkladů prostřednictvím příkazů, které se zadávají do dialogových řádků, např. příkazem *maxplusmaxalgol* se zjišťuje vlastní číslo a vlastní vektor matice. K vysvětlení jednotlivých příkazů lze využít nápovědy, která se po spuštění zobrazí v okně Scilab Browse Help obsahující popis každého příkazu včetně demonstračního příkladu.

Scilab Console

File Edit Preferences Control Applications ?

Scilab Console

Startup execution:
loading initial environment

Start Max-Plus Algebra
Load macros
Load help

```
-->A=[14 -%inf -%inf 8 -%inf -%inf -%inf -%inf; 7 14 -%inf -%inf -%inf -%inf; %inf 7 37 -%inf -%inf -%inf -%inf; -%inf -%inf -%inf 37 14 -%inf
A =
    14.    -Inf    -Inf     8.    -Inf    -Inf    -Inf    -Inf
     7.     14.    -Inf    -Inf    -Inf    -Inf    -Inf    -Inf
    -Inf     7.     37.    -Inf    -Inf    -Inf    -Inf    -Inf
    -Inf    -Inf    -Inf     37.    14.    -Inf    11.    -Inf
    -Inf    -Inf    -Inf    -Inf     27.    13.    -Inf    -Inf
    -Inf    -Inf     6.    -Inf    -Inf     27.    11.    -Inf
    -Inf    -Inf    -Inf    -Inf    -Inf    -Inf     37.    12.
    -Inf    -Inf     6.    -Inf     14.    -Inf    -Inf     37.
```

```
-->p=10;
```

```
-->x0=[14;14;37;37;27;27;37;37];
```

```
-->[X]=maxplussys(A,x0,p)
```

```
X =
    14.    45.    82.    119.    156.    193.    230.    267.    304.    341.    378.
    14.    28.    52.    89.    126.    163.    200.    237.    274.    311.    348.
    37.    74.    111.    148.    185.    222.    259.    296.    333.    370.    407.
    37.    74.    111.    148.    185.    222.    259.    296.    333.    370.    407.
    27.    54.    81.    108.    135.    172.    209.    246.    283.    320.    357.
    27.    54.    85.    122.    159.    196.    233.    270.    307.    344.    381.
    37.    74.    111.    148.    185.    222.    259.    296.    333.    370.    407.
    37.    74.    111.    148.    185.    222.    259.    296.    333.    370.    407.
```

Obr. č. 29: Pracovní okno software Scilab

8 ZÁVĚR

Východiskem pro řešení práce byly především rešerše domácí a zahraniční literatury, týkající se problematiky synchronizace linek MHD a vhodného inovativního simulačního nástroje. Tyto rešerše byly poměrně časově náročné vzhledem k neucelenosti zahraničních publikací. První část zahraničních publikací tvořily publikace zahrnující využití modelovacího nástroje Petriho sítí v systémech městské hromadné dopravy.

Při prvních experimentech jsem se snažil o sestavení dopravní sítě, ve které je prostřednictvím vstupních a výstupních podmínek dáno, které prvky jsou vzájemně podmíněny a ovlivněny pro zajištění synchronizace odjezdů. Při dalším studiu aplikací tohoto nástroje byla v několika publikacích zjištěna provázanost s matematickým nástrojem max-plus algebry. Tato skutečnost byla velice přínosná vzhledem ke skutečnosti, že rovnice max-plus algebry umožňují definovat změny stavu v Petriho sítí.

V dalším postupu jsem se na základě reálných potřeb v případě racionalizace MHD v Prostějově věnoval sestavení systémů rovnic zajišťujících synchronizaci v relacích bez možnosti původního přímého spojení. Formální zápis změn systému rovnic vycházel z publikací o teorii max-plus algebry a díky experimentům byl několikrát upraven. Při experimentech bylo nezbytné správně formálně zapsat vystupující vazby související s trasou a pohybem vozidel, tak aby nedocházelo k nežádoucím situacím. Příkladem může být protisměrná jízda vozidel na lince obsluhované jedním vozidlem nebo nezohlednění části trasy, kterou musí autobus absolvovat.

Práce prokázala, že problematiku synchronizace linek MHD lze řešit kromě tradičního modelování pomocí matematického programování také netradičně pomocí matematického aparátu max-plus algebry. Některé časově závislé Petriho sítě, jejichž matematickou řečí je max-plus algebra umožňují také vizualizaci, kterou mohou ocenit dopravní inženýři při analýzách rozhodnutí o změnách jízdního řádu. Max-plus modely jsou navíc již podporované i dostupným otevřeným softwarem na jejich rychlý numerický výpočet.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] ANDERSEN, M. H. *Max-plus algebra: properties and applications*. 2002. Dostupné z <http://www.teachingcollegemath.com/files/pdf/max_plus_algebras_thesis_2002.pdf>
- [2] BACELLI F., COHEN G., OLSDER G. J., QUADRAT J. P. *Synchronization and Linearity*. 2001. Dostupné z <<http://www-rocq.inria.fr/metalau/cohen/documents/BCOQ-book.pdf>>
- [3] BURKARD R. E., BUTKOVIČ P. *Max algebra and the linear assignment problem*. 2003. Dostupné z <http://web.mat.bham.ac.uk/P.Butkovic/My%20papers/Max%20and%20AP.pdf>>
- [4] CECHLÁROVÁ, K. *Eigenvectors of interval matrices over max-plus algebra, Discrete Applied Mathematics - Special issue: Max-algebra archive*. 2005. č. 1, s 2 - 15.
- [5] ČERNÝ, J., KLUVÁNEK, P. *Základy matematickej teórie dopravy*. Bratislava: VEDA, 1991. 279 s. ISBN 80-224-0099-8.
- [6] GOVERDE M., P. *Railway timetable stability analysis using max-plus system theory*. Dostupné z <www.elsevier.com/locate/trb>
- [7] HEIDERGOTT B., OLSDER G. J., VAN DER WOUDE J. *Max Plus at Work: Modeling and Analysis of Synchronizes Systems: A Course on Max-plus Applications*. Princeton: Princeton University Press, 2005. 226 s. ISBN 978-0691117638
- [8] JANOUŠEK, V. *Modelování objektů Petriho sítěmi*. Disertační práce. Brno: Vysoké učení technické, 2008. 164 s.
- [9] KOZEL, P. *Časová koordinace spojů veřejné hromadné dopravy v úseku Frýdek-Místek – Dobrá*. Diplomová práce. Ostrava. Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, 2009.
- [10] MARKL, J. *Petriho síť I*. Ostrava: VŠB-Technická univerzita Ostrava, 2009. (Učební texty) Dostupné z <<http://www.cs.vsb.cz/markl/pn/index.html>>
- [11] NAIT-SIDI-MOH, A., MANIER, M.-A., EL MOUDNI, A., WACK, M. *Petri net with conflicts and (max, plus) algebra*. Dostupné z http://www.gsem.fr/old/download/NAI_06b.pdf
- [12] NAIT-SIDI-MOH, A., AIT-CHEIK-BIHI, W., WACK, M. *Modelling and Analysis of a Non-Synchronized Transport Network using Petri Nets and (Max, Plus) Algebra*. Dostupné z <<http://archives-ouvertes.fr/docs/00/47/01/17/PDF/Article-CIE39.pdf>>

- [13] NAIT-SIDI-MOH, A., MANIER, M.-A., EL MOUDNI, A. *Spectral analysis for performance evaluation in a bus network*. Dostupné z <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/47/01/17/PDF/Article-CIE39.pdf>
- [14] NAIT-SIDI-MOH, A., MANIER, H., MANIER, M.-A., EL MOUDNI, A. *Control of a Public Transport Network by the Max-Plus Algebra: case of a system constrained by maximal connection times*. Dostupné z <http://www.wseas.us/e-library/conferences/skiathos2002/papers/447-298.pdf>
- [15] PEŠKO, Š. Max-Algebra for Bus Line Synchronization, In *Sborník Quantitative Methods in Economics (Multiple Criteria Decision Making XV)*: Proceedings of the International Scientific Conference: October 6.-8. 2010, Smolenice, Iura Edition, 2010. ISBN 978-80-8078-364-8. - P. 165-173.
- [16] RETCHKIMAN K., Z. *Modeling and Analysis of the Metro-bus Public Transport System in Mexico City using Timed Event Petri Nets and Max-Plus Algebra*. In: 18th World IMACS/MODSIM Congress, Cairns, Austria, 13-17 July, 2009, 1685-1991, <http://mssanz.org.au/modsim09>.
- [17] *Studie městské hromadné dopravy města Prostějova včetně komplexní dopravní obslužnosti průmyslové zóny*. UDIMO spol s.r.o., 2007.
- [18] TUREK, R. Modelování pohybu vozidel v síti linek MHD In *Sborník z konference Úlohy diskrétní optimalizace v dopravní praxi 2010*. Pardubice: Univerzita Pardubice. Dopravní fakulta Jana Pernera. Katedra technologie a řízení dopravy, 2010, s. 183 - 192. ISBN 978-80-7395-297-6
- [19] TUREK, R. Koordinace linek MHD s využitím Petriho sítí In *Sborník z konference Otvorený softvér vo vzdelávaní, výskume a v IT riešeníach*. Žilina: Žilinská univerzita v Žilíně. Fakulta Riadenia a informatiky. Katedra matematických metód, 2010. s. 205 - 214. ISBN 978-80-970457-0-8
- [10] TUREK, R. Matematické modelování vybraných problémů MHD Prostějov. Diplomová práce. Ostrava. Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, 2009.
- [21] TUZAR, A., PASTOR, O. *Teorie dopravních systémů*. Praha: ASPI, 2007. 312 s. ISBN 978-80-7357-2853
- [22] DE VRIES, R., B. DE SCHUTTER, B., DE MOOR, B. *On max-algebraic models for transportation networks*. Dostupné z http://www.dcsc.tudelft.nl/~bdeschutter/pub/rep/98_00.pdf
- [23] *Pipe2*. Dostupné z <http://pipe2.sourceforge.net>

- [24] *Scilab*. Dostupné z <<http://www.scilab.org>>
- [25] *Snoopy*. Dostupné z <<http://www-dssz.informatik.tu-cottbus.de/index.html!/software/snoopy.html>>

SEZNAM VLASTNÍCH PRACÍ

- [1] TUREK, R. *Zkušenosti s matematickým modelem PRIVOL v podmínkách MHD Prostějov*, Sborník příspěvků konference „Dopravní systémy 2009“, Pardubice, 2009, s. 70 - 77, ISBN 978 - 80 - 86530 - 63 - 5
- [2] TUREK, R. *Modelování pohybu vozidel v síti linek MHD s využitím Petriho sítí*, Sborník příspěvků konference „Úlohy diskrétní optimalizace v dopravní praxi 2010“, Pardubice, 2010, s. 183 - 192, ISBN 978-80-7395-297-6
- [3] TUREK, R. *Koordinace linek MHD s využitím Petriho sítí*, Sborník příspěvků konference „Otvorený softvér vo vzdelávaní, výskume a v IT riešeniach 2010“, Žilina, 2010, s.205 - 214, ISBN 978-80-970457-0-8
- [4] TUREK, R. *Koordinace linek MHD s využitím Petriho sítí*, Sborník příspěvků konference „Optimální umísťování obslužných středisek pomocí IP-solvrů“, Žilina, 2010
- [5] DORDA, M., TUREK, M., TUREK, R. *Synchronization of public transport lines in the Max-plus algebra*, Sborník příspěvků konference „TRANSCOM 2011“, Žilina, 2011, s. 25 - 28, ISBN 978-80-554-0369-4
- [6] TUREK, R. *Možnosti synchronizace linek MHD ve Scilabu*, Sborník příspěvků konference „Otvorený softvér vo vzdelávaní, výskume a v IT riešeniach 2011“, Žilina, 2011, s. 121 - 130, ISBN 978-80-970457-1-5
- [7] TUREK, R. *Možnosti využití software Snoopy a Pipe2 k navrhování linek MHD*, Perner's Contacts [online]. 2010, č. 3, s. 371 - 380. Dostupné z <http://pernerscontacts.upce.cz/19_2010/Turek_R.pdf> ISSN 1801-674X
- [8] TUREK, M., TUREK, R. *Modelování vybraných dopravních problémů s využitím Petriho sítí*, Posterus [online]. 2010, č. 12, s. 1 - 13. Dostupné z <<http://www.posterus.sk/?p=9547&output=pdf>> ISSN 1338-0087
- [9] DORDA, M., TRESLER, F., TUREK, M., TUREK R. *Modelling and Simulation of Finite Markov Multi-server Queueing System Subject to Breakdowns*, Sborník příspěvků konference „10. th International Conference Aplimat“, Bratislava, 2011, s. 1157 - 1166, ISBN 978-80-89313-51-8
- [10] TUREK, R. *Synchronizace odjezdů spojů z přestupních zastávek mhd v max-plus algebře*, Perner's Contacts [online]. 2011, č. 1, s. 384 - 394. Dostupné z <http://pernerscontacts.upce.cz/21_2011/Turekr.pdf> ISSN 1801-674X

- [11] TUREK, M., TUREK, R. *Solving selected traffic problems in the Max-plus algebra*, Journal of Information, Control and Management Systems. 2011, č. 1, s. 67 - 75. ISSN: 1336-1716
- [12] TUREK, R. *Časová koordinace vybraných linek MHD Prostějov*, Perner's Contacts [online]. 2011, č. 4, s. 391 - 400. Dostupné z <http://pernerscontacts.upce.cz/23_2011/TurekR.pdf> ISSN 1801-674X
- [13] TUREK, M. *Časová koordinace spojů v uzlech logistických systémů*, Acta Logistica Moravica [online]. 2012, č. 1, s. 135 - 140. Dostupné z <http://web2.vslg.cz/fotogalerie/acta_logistica/2012/1-cislo/16-turek-r.pdf> ISSN 1804-8315
- [14] PEŠKO, Š., TUREK, M., TUREK R. *Max-plus Algebra at Road Transportation*, Sborník příspěvků konference „30. th International conference on Matematical Methods in Economics“, Karviná, 2012 (zaslaný příspěvek)
- [15] PEŠKO, Š., TUREK, R. *Max-plus Linear Systems at Bus Line Synchronization*, In: In: Quantitative methods in economics, Multiple criteria decision making XV, 30th May – 1st Jun 2012, (zaslaný příspěvek).

SEZNAM OBRÁZKŮ

- Obr. č. 1: Znázornění odjezdů na společném úseku pravidelnými vepsanými n -úhelníky
- Obr. č. 2: Dvě varianty řešení příkladu
- Obr. č. 3: Znázornění případného posunu odjezdu i -tého spoje
- Obr. č. 4: Znázornění časového rozdílu mezi i -tým a j -tým spojem
- Obr. č. 5: Příklad změny stavu po provedení přechodu v P/T Petriho síti
- Obr. č. 6: Příklad železniční sítě
- Obr. č. 7: Schéma modelové dopravní sítě
- Obr. č. 8: Schéma dvou diametrálních linek
- Obr. č. 9: Komunikační graf pro model diametrálních linek při obsluze jedním vozidlem
- Obr. č. 10: Komunikační graf pro model diametrálních linek při obsluze více vozidly
- Obr. č. 11: Schéma dvou okružních linek
- Obr. č. 12: Komunikační graf pro model okružních linek při obsluze jedním vozidlem
- Obr. č. 13: Komunikační graf pro model okružních linek při obsluze více vozidly
- Obr. č. 14: Schéma více linek v síti
- Obr. č. 15: Modelová dopravní síť MHD
- Obr. č. 16: Grafické znázornění Petriho sítě pro řešený problém
- Obr. č. 17: Fragment modelu Petriho sítě znázorňující požadavek přestup
- Obr. č. 18: Fragment modelu Petriho sítě bez požadavku na přestup
- Obr. č. 19: Schéma sítě linek MHD v Prostějově
- Obr. č. 20: Schéma autobusové stanice v Prostějově
- Obr. č. 21: Schéma s vyznačením alternativních tras v relaci sídl. E. Beneše – aut. st.
- Obr. č. 22: Schéma s vyznačením alternativních tras v relaci Domamyslice – OP
- Obr. č. 23: Schéma s vyznačením alternativních tras v relaci autobusová stanice – OP
- Obr. č. 24: Fragment dopravní sítě MHD Prostějov obsahující linky 11 a 15
- Obr. č. 25: Fragment dopravní sítě MHD Prostějov obsahující linky 9 a 16
- Obr. č. 26: Fragment dopravní sítě MHD Prostějov obsahující linky 7 a 41
- Obr. č. 27: Pracovní plocha v software Snoopy
- Obr. č. 28: Pracovní plocha v software Pipe2
- Obr. č. 29: Pracovní okno software Scilab

SEZNAM TABULEK

- Tab. č. 1: Provozní parametry linek 11 a 15
- Tab. č. 2: Jízdní doby mezi zastávkami na linkách 11 a 15
- Tab. č. 3: Srovnání výsledků jednotlivých variant
- Tab. č. 4: Příklad jízdního řádu pro variantu 1 ve směru aut.st. - TESCO
- Tab. č. 5: Příklad jízdního řádu pro variantu 1 ve směru TESCO - aut. st
- Tab. č. 6: Provozní parametry linek 9 a 16
- Tab. č. 7: Jízdní doby mezi zastávkami na linkách 9 a 16
- Tab. č. 8: Srovnání výsledků jednotlivých variant
- Tab. č. 9: Příklad jízdního řádu pro variantu 1 ve směru Domamyslice – Prům. zóna
- Tab. č. 10: Příklad jízdního řádu pro variantu 1 ve směru Prům. zóna – Domamyslice
- Tab. č. 11: Provozní parametry linek 7 a 41
- Tab. č. 12: Jízdní doby mezi zastávkami na linkách 7 a 41
- Tab. č. 13: Srovnání výsledků jednotlivých variant
- Tab. č. 14: Příklad jízdního řádu pro variantu 1 ve směru aut. st. – OP
- Tab. č. 15: Příklad jízdního řádu pro variantu 1 ve směru OP – aut. st.

OBSAH

ANOTACE.....	2
ANNOTATION	2
Prohlášení studenta.....	3
OBSAH	4
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....	6
1 ÚVOD	7
2 CÍLE DISERTAČNÍ PRÁCE	9
2.1 Cíle práce.....	9
2.2 Osnova práce	9
3 SOUČASNÝ STAV ŘEŠENÍ PROBLEMATIKY.....	10
3.1 Heuristické metody	10
3.2 Lineární programování	12
3.3 Petriho sítě.....	13
3.4 Max-plus algebra.....	15
4 POTŘEBNÉ MATEMATICKÉ POJMY A TVRZENÍ.....	19
4.1 Max-plus algebra.....	19
4.1.1 Základní pojmy	19
4.1.2 Spektrální analýza	20
5 MODEL Y ZÁKLADNÍCH TYPŮ SYNCHRONIZOVANÝCH LINEK	23
5.1 Max-plus modely synchronizace linek.....	23
5.1.1 Parametry a proměnné.....	24
5.1.2 Model synchronizace pro dvě diametrální linky	24
5.1.3 Model synchronizace pro dvě okružní linky	29
5.1.4 Model synchronizace více linek v síti	33
5.2 Synchronizace dvou okružních linek v Petriho síti	39
6 VYHODNOCENÍ EXPERIMENTŮ NA REÁLNÝCH DATECH	42
6.1 Charakteristika MHD Prostějov	42
6.2 Definování problému.....	44
6.3 Synchronizace vybraných linek MHD Prostějov	45
6.4 Experiment č. 1	48
6.4.1 Systém rovnic varianty č. 1 zajišťující přestup mezi linkami 11 a 15	51
- výchozí zastávky autobusová stanice a Domamyslice.....	51

6.4.2 Systém rovnic varianty č. 2 zajišťující přestup mezi linkami 11 a 15	53
- výchozí zastávky autobusová stanice a TESCO	53
6.4.3 Systém rovnic varianty č. 3 zajišťující přestup mezi linkami 11 a 15	56
- výchozí zastávky Domamyslice a Žešov	56
6.4.4 Systém rovnic varianty č. 4 zajišťující přestup mezi linkami 11 a 15	58
- výchozí zastávky TESCO a Žešov	58
6.5 Experiment č. 2	62
6.5.1 Systém rovnic varianty č. 1 zajišťující přestup mezi linkami 9 a 16	64
- výchozí zastávky Domamyslice a nemocnice.....	64
6.5.2 Systém rovnic varianty č. 2 zajišťující přestup mezi linkami 9 a 16	67
- výchozí zastávky Domamyslice a Průmyslová zóna	67
6.5.3 Systém rovnic varianty č. 3 zajišťující přestup mezi linkami 9 a 16	70
- výchozí zastávky TESCO a nemocnice	70
6.5.4 Systém rovnic varianty č. 4 zajišťující přestup mezi linkami 9 a 16	72
- výchozí zastávky TESCO a Průmyslová zóna.....	72
6.6 Experiment č. 3	76
6.6.1 Systém rovnic varianty č. 1 zajišťující přestup mezi linkami 7 a 41	78
- výchozí zastávky autobusová stanice a Krasice.....	78
6.6.2 Systém rovnic varianty č. 2 zajišťující přestup mezi linkami 7 a 41	81
- výchozí zastávky autobusová stanice a OP.....	81
6.6.3 Systém rovnic varianty č. 3 zajišťující přestup mezi linkami 7 a 41	83
- výchozí zastávky Domamyslice a Krasice.....	83
6.6.4 Systém rovnic varianty č. 4 zajišťující přestup mezi linkami 7 a 41	86
- výchozí zastávky Domamyslice a OP	86
7 POUŽITÉ SOFTWARE NÁSTROJE.....	91
7.1 Softwarové nástroje pro sestavení Petriho sítí	91
7.1.1 Software Snoopy	91
7.1.2 Software Pipe2	92
7.2 Softwarové nástroje pro max-plus algebru.....	93
8 ZÁVĚR.....	95
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	96
SEZNAM VLASTNÍCH PRACÍ.....	99
SEZNAM OBRÁZKŮ	101
SEZNAM TABULEK.....	102

